Th. Schlegel.

fl 1 „ 6
„ – „ 18

Suma fl 1 „ 24

Anfangsgründe

der

reinen Mathematik

für

den Schul- und Selbst-Unterricht

[illegible]

von

[illegible]

[illegible]

Zweiter Theil.

Planimetrie.

Siebente verbesserte Auflage.

Mit 8 Figurentafeln.

[illegible]

Druck und Verlag [illegible]

[illegible]

Anfangsgründe

der

reinen Mathematik

für

den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Karl Koppe,

Professor und Oberlehrer am königlich preußischen Gymnasium zu Soest.

Zweiter Theil.

Planimetrie.

Siebente verbesserte Auflage.

Mit 9 Figurentafeln.

Essen.

Druck und Verlag von G. D. Bädeker.

1858.

Die

Planimetrie

für den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Karl Koppe,
Professor und Oberlehrer am königlich preußischen Gymnasium zu Soest.

Siebente verbesserte Auflage.

Mit 9 Figurentafeln.

Essen.
Druck und Verlag von G. D. Bädeker.
1858.

Vorrede zur siebenten Auflage.

Ueber den Plan, welchen der Verfasser bei der Bearbeitung der Planimetrie befolgt hat, wird aus den Vorreden zu den früheren Auflagen Folgendes hier wiederholt:

Der Verfasser hat vorzüglich dahin gestrebt, durch Befolgung eines einfachen und natürlichen Entwickelungsganges und durch eine klare und faßliche Darstellung dem Anfänger das Studium der Geometrie so leicht, als möglich zu machen, ohne jedoch auf der andern Seite der wissenschaftlichen Strenge und Gründlichkeit etwas zu vergeben. Indem zugleich in erläuternden Bemerkungen, welche den einzelnen Abschnitten und Unterabtheilungen theils vorangehen, theils folgen, dem Leser der architektonische Plan des aufzuführenden Gebäudes vor Augen gelegt wird, ist die Absicht des Verfassers dahin gegangen, daß das Verständniß des Lesers sich nicht bloß auf ein richtiges Erfassen der einzelnen Sätze beschränken, sondern zu einer deutlichen Einsicht in den systematischen Zusammenhang und zu einer klaren Uebersicht des Ganzen erheben möge, was nach des Verfassers Ansicht wesentlich dazu beitragen dürfte, das Interesse des Anfängers an dem Studium der Wissenschaft zu erhöhen. — Besonders in den ersten Abschnitten, welche für den ersten geometrischen Unterricht jüngerer Schüler, zwölf- bis dreizehnjähriger Knaben, bestimmt sind, ist nach der größten Deutlichkeit gestrebt, in den späteren Abschnitten jedoch, welche für reifere Schüler geschrieben sind, eine größere Kürze der Behandlung angewendet und mehr der eigenen Beurtheilung des Lesers überlassen worden.

So wie in jeder andern Wissenschaft, so giebt es auch in allen Zweigen der Geometrie solche Sätze, deren Kenntniß für ein weiteres Fortschreiten durchaus unentbehrlich ist, und andere, deren Kenntniß zwar ebenfalls lehrreich und nützlich, aber nicht geradezu unerläßlich ist, und die daher, ohne den Zusammenhang zu stören, wenn Zeit und Umstände es erheischen, gänzlich übergangen werden oder einem späteren Cursus vorbehalten bleiben können. Diese Sätze sind im Lehrbuche durch ein vorgesetztes Sternchen (*) bemerklich gemacht. Ueberhaupt scheint es dem Verfasser bei der ungleichen Befähigung der Schüler in zahlreichen Classen zweckmäßig zu sein, dasjenige, was unumgänglich gewußt werden muß und von Jedem unbedingt zu fordern ist, bestimmt und deutlich von dem zu scheiden, dessen Kenntniß zwar ebenfalls nützlich und empfehlenswerth, wenn auch nicht geradezu unerläßlich ist. Auch dürfte ein rasches Fortschreiten in der Wissenschaft mehr geeignet sein, das Interesse der Anfänger rege zu halten, als eine weite Ausführung und ein langes Verweilen in der nehmlichen Lehre.

Wenn nun auch im Lehrbuche selbst über den bei der Anordnung der einzelnen Lehren befolgten Plan in besonderen Bemerkungen Auskunft ertheilt ist, so dürfte doch mit Recht hier eine übersichtliche Darlegung dieses Planes erwartet werden.

Auf den ersten Blick scheint sich zunächst für die Planimetrie aus der Natur des Gegenstandes die folgende Anordnung zu ergeben, bei welcher vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren fortgeschritten wird, und die sich auch wirklich in vielen Lehrbüchern findet: — Gerade Linie, Winkel, parallele Linien, Vieleck (Dreieck, Viereck u. s. w.), Kreis.

Hierbei giebt sich jedoch sogleich darin ein großer Uebelstand zu erkennen, daß sich nicht mit Sicherheit darüber entscheiden läßt, welche Sätze eigentlich zum Kreise gehören, indem die Sätze, welche z. B. in diesem Lehrbuche unter jener Ueberschrift zusammengefaßt sind, sich mit wenigen Ausnahmen auch recht gut ohne alle Erwähnung des Kreises behandeln lassen, wie dieß z. B. wirklich in einem schätzbaren geometrischen Lehrbuche (Crelle, Lehrbuch der Elemente der Geometrie) geschehen ist. Auch sind jene Sätze in der That nur eine Fortsetzung und Erweiterung der Lehre vom Dreiecke und Vielecke überhaupt, wenn auch allerdings dadurch, daß man mit denselben die Vorstellung vom Kreise verbindet, an Anschaulichkeit und Kürze der Behandlung gewonnen wird.

Andererseits stellt sich jedoch bei einer gründlicheren Betrachtung ein höherer Eintheilungsgrund in Folgendem heraus: — Die Vergleichung räumlicher Größen führt entweder zur Gleichheit oder Verschiedenheit. Die Gleichheit kann aber wieder eine doppelte sein, entweder Gleichheit verbunden mit vollständiger Uebereinstimmung in allen Stücken, welche an und mit den zu vergleichenden Größen zugleich auftreten, — Congruenz, oder Gleichheit ohne eine solche vollständige Uebereinstimmung. — Da nun Congruenz offenbar das einfachste Verhältniß ist, welches überhaupt zwischen zwei räumlichen Größen stattfinden kann, so gehen die Sätze, welche sich mit der Vergleichung der Größen beschäftigen, in wiefern sie congruent sind oder nicht, allen anderen voraus, und zwar nehmen gerade Linie und Winkel die erste Stelle ein (Abschn. 1 und 2), weil sie überhaupt keine andere Vergleichung zulassen; zu den Sätzen vom Winkel gehören aber auch offenbar die über parallele Linien (Abschn. 3); und es folgen nun die Sätze über die Dreiecke, Vierecke und Vielecke überhaupt (Abschn. 4 und 5), in wiefern sie congruent sind oder nicht, oder in wiefern überhaupt nur von der Gleichheit oder Ungleichheit der Linien und Winkel in oder an denselben die Rede ist, woran sich als eine Fortsetzung und Erweiterung die unter der Ueberschrift: „Vom Kreise" zusammengefaßten Sätze (Abschn. 6) anreihen.

Während bis hierher nur Linien und Winkel mit einander in Hinsicht ihrer Größe verglichen worden sind, und nur von Congruenz die Rede gewesen ist, zeigt sich bei der Vergleichung zweier Figuren in Beziehung auf ihre Größe, daß dieselben gleiche Größe haben können, ohne congruent zu sein, woraus sich ein folgender Abschnitt (7) ergiebt.

In diesem, so wie in allen vorhergehenden Abschnitten handelt es sich wieder nur um die einfache Frage, ob zwei räumliche Größen gleich oder verschieden sind. Weiter kann aber auch die Verschiedenheit selbst zum Gegenstande der Betrachtung erhoben werden und eben sowohl ihre Gleichheit, als Ungleichheit haben, woraus bei Gleichheit der Verschiedenheit oder des Verhältnisses der Begriff der Proportionalität hervorgeht. Da aber in einer jeden Proportion auf einmal vier Größen in Betracht gezogen werden, so haben es die nun folgenden Sätze über die Proportionalität der räumlichen Größen offenbar mit einer bei Weitem weniger einfachen Art der Vergleichung zu thun, als alle vorhergehenden Sätze, in denen immer nur zwei Größen, Linien, Winkel oder Flächen, mit einander verglichen wurden, weshalb auch diese Sätze mit Recht jenen vorangehen, so wie ja wohl alle Erfahrungen darin übereinstimmen, daß die Lehre von der Proportionalität dem Anfänger die meiste Schwierigkeit darbietet. — Je nachdem nun in einer Proportion bloß Linien mit

Linien zusammengestellt oder auch Flächen in Betracht gezogen werden, ergeben sich hieraus die beiden folgenden Abschnitte (8 und 9).

Endlich hat der zehnte Abschnitt die Ausmessung des Kreises zu seinem Gegenstande, und die dann noch folgenden Abschnitte (11 — 14) enthalten Ergänzungen und Erweiterungen der früheren Abschnitte.

Die anregendste Uebung für die eigenen Kräfte der Anfänger gewährt ohnstreitig die Anwendung der erlangten Kenntnisse zur Auflösung von Aufgaben. Der Verfasser hat daher den einzelnen Abschnitten eine nicht unbedeutende Anzahl von Uebungsaufgaben beigefügt, welche sich mit Hilfe der vorangehenden Lehrsätze lösen lassen. Hierbei ist der Verfasser jedoch nicht von der Ansicht ausgegangen, daß die jedem Abschnitte beigefügten Aufgaben nun auch so nach der Reihe vollständig mit den Schülern durchzunehmen seien; vielmehr pflegt derselbe die Aufgaben in den verschiedenen Lehrcursen mit Auswahl und zum Theile selbst für die schriftlichen Arbeiten der obersten Classe zu benutzen.

Um dem Schüler schon frühzeitig Gelegenheit zu dieser angenehmen und nützlichen Beschäftigung zu geben, ist der Verfasser von dem streng systematischen Entwickelungsgange in soweit abgewichen, als schon nach dem vierten Abschnitte Aufgaben behandelt werden, noch ehe die Bedingungen, unter denen zwei Kreise sich schneiden, festgestellt sind, was offenbar erst im sechsten Abschnitte geschehen konnte. Wenn sich der Verfasser auch nicht auf den Vorgang von Euclid berufen will, welcher in seinen Elementen in gleicher Weise verfahren ist, so glaubt derselbe doch durch die angeführten didaktischen Rücksichten hinreichend entschuldigt zu sein, zumal Aufgaben für das System selbst einen untergeordneten Werth haben.

Den drei ersten Abschnitten konnten jedoch keine Aufgaben beigefügt werden, da der Schüler offenbar schon ein hinreichendes Material von Kenntnissen gewonnen haben muß, ehe er im Stande sein kann, Aufgaben auf eigene Hand zu lösen. Der Verfasser hat sich daher in den ersten Abschnitten darauf beschränkt, an geeigneten Stellen Fragen zur Uebung einzuschalten, welche von dem Schüler nach Anleitung des Lehrers in einem besonderen Hefte zu bearbeiten sind und zugleich dem Anfänger eine zweckmäßige Uebung in der sorgfältigen Zeichnung geometrischer Figuren gewähren können.

Bei dieser neuen Auflage sind die Sätze, welche die gegenseitige Abhängigkeit der Winkel, welche entstehen, wenn zwei Linien von einer dritten durchschnitten werden, ganz abgesehen davon, ob diese Linien sich selbst schneiden oder parallel laufen, zu ihrem Gegenstande haben, mit den Sätzen über den Parallelismus zweier Linien verschmolzen worden, während in den früheren Auflagen jene Sätze diesen als Vorbereitung auf dieselben vorangeschickt waren. Wenn auch die frühere Trennung einem streng systematischen Gange mehr angemessen erscheint, so dürfte doch die Zusammenziehung der so nahe verwandten Sätze für den Anfänger übersichtlicher und anschaulicher und eben darum ansprechender sein. Eben so hofft der Verfasser, daß auch die übrigen bei dieser Auflage angebrachten Abänderungen sich den Lehrenden und Lernenden als Verbesserungen empfehlen und dazu beitragen werden, dem Anfänger die Auffassung des Inhalts des Buches zu erleichtern.

Soest, im August 1858.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

§. 1. Erklärung.

Die Geometrie hat zu ihrem Gegenstande die Körper, Flächen und Linien.

Ein Körper ist ein begrenzter Raum; die Fläche ist die Grenze des Körpers; die Linie ist die Grenze der Fläche, und die Grenze der Linie ist der Punkt.

Körper, Flächen und Linien können als aus Theilen bestehend gedacht werden, und die Theile eines Körpers sind wieder Körper, die Theile der Flächen wieder Flächen und die Theile der Linien wieder Linien. — Körper, Flächen und Linien gehören daher zu den Größen, und weil sie im Raume vorgestellt werden, so nennt man sie räumliche Größen. Man kann daher auch sagen: die Geometrie ist die Lehre von den räumlichen Größen und folglich ein Theil der Mathematik, welche sich mit den Größen überhaupt beschäftigt.

Da der Punkt keine Theile hat, so gehört er nicht zu den Größen, und seiner geschieht in der Geometrie nur in sofern Erwähnung, als er die Grenze der Linie bildet.

Die drei räumlichen Größen unterscheiden sich von einander durch die Anzahl ihrer Ausdehnungen; der Körper hat nehmlich drei Ausdehnungen: Länge, Breite und Höhe; die Fläche hat zwei Ausdehnungen: Länge und Breite; die Linie hat nur eine Ausdehnung: Länge.

Anm. 1. Am geometrischen Körper berücksichtigt man nur Größe und Gestalt, am physischen noch unzählige andere Merkmale, als Schwere, Härte, Farbe, Glanz, Durchsichtigkeit, Geruch, Geschmack u. s. w.

Beispiele von geometrischen Körpern sind der Würfel, eingeschlossen von sechs Flächen, deren jede wieder von vier Linien begrenzt ist; die Walze, eingeschlossen von einer krummen Fläche und zwei Kreisen; die Kugel, eingeschlossen von einer einzigen krummen Fläche, u. dgl. m.

Flächen kommen immer nur an Körpern, Linien nur an Flächen vor; nirgends giebt es eine vom Körper getrennte Fläche, eine von der Fläche getrennte Linie. In unserer Vorstellung können wir jedoch die Fläche vom Körper und die Linie von der Fläche gesondert betrachten.

Anm. 2. Da die räumlichen Größen nur eine besondere Art Größen sind, so müssen von denselben auch sämmtliche Sätze der allgemeinen Größenlehre gelten; diejenigen mathematischen Sätze, welche für alle Größen überhaupt gelten und in der Geometrie vorzüglich angewendet werden, sind folgende:

1) Größen derselben Art sind entweder gleich oder ungleich. Sind zwei Größen A und B einander gleich, so wird dieses durch $A = B$ (lies A gleich B) bezeichnet.

Eine Größe A heißt größer, als eine andere B, wenn diese als Theil von jener gedacht werden kann, in Zeichen: $A > B$ (lies A größer, als B) oder $A < B$ (lies A kleiner, als B).

2) Jedes Ganze ist allen seinen Theilen zusammen gleich und größer, als jeder seiner Theile.

3) Zwei Größen, welche einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich.

4) Ist eine Größe größer oder kleiner, als die eine von zwei gleichen Größen, so ist sie auch größer oder kleiner, als die andere.

5) Ist eine Größe größer, als eine zweite, und diese größer, als eine dritte, so ist auch die erste Größe größer, als die dritte.

6) Gleiches zu Gleichem hinzugefügt giebt Gleiches.

7) Gleiches zu Größerem hinzugefügt giebt Größeres.

8) Größeres zu Größerem hinzugefügt giebt Größeres.

9) Gleiches von Gleichem hinweggenommen giebt Gleiches.

10) Gleiches von Größerem hinweggenommen giebt Größeres.

11) Größeres von Gleichem hinweggenommen giebt Kleineres.

12) Kleineres von Größerem hinweggenommen giebt Größeres.

Anm. 3. Von den räumlichen Größen ins Besondere gelten folgende Begriffsbestimmungen:

1) Zwei räumliche Größen (Körper, Flächen oder Linien) heißen congruent, wenn sie zum Decken gebraucht werden können, also überhaupt nicht verschieden sind.

2) Zwei räumliche Größen sind gleich, wenn die nehmliche dritte Größe in beiden gleich vielmal enthalten ist.

Congruente räumliche Größen sind daher nothwendig auch gleich.

Von diesen allgemeinen Sätzen sind die Erklärungen §. 7, 11, 18, 69 und 162 besondere Fälle. Es schien aber zweckmäßiger, beim ersten Unterrichte vom Besonderen auszugehen.

§. 2. Erklärung.

Die Linien sind von zweierlei Art, gerade und krumme.

Eben so sind auch die Flächen von zweierlei Art, ebene und unebene oder krumme Flächen.

Anm. Der Begriff der geraden Linie ist ein einfacher; und es ist daher weder nöthig, noch möglich zu sagen, was eine gerade Linie ist.

Den Begriff der geraden Linie als gegeben annehmend, kann man von der ebenen Fläche als Merkmal aufführen, daß, wenn man beliebige Punkte in derselben durch gerade Linien verbindet, diese ganz mit der Fläche zusammenfallen.

§. 3. Erklärung.

Die Geometrie zerfällt in zwei Theile, Planimetrie und Stereometrie. Die Planimetrie betrachtet nur dasjenige, was in ein und derselben Ebene vorgestellt werden kann; die Stereometrie beschränkt ihre Vorstellungen nicht auf eine Ebene.

Anm. Räumliche Größen, welche in der Planimetrie behandelt werden, sind hiernach: Die gerade Linie und solche krumme Linien, welche in einer Ebene liegen, wie z. B. der Kreis, ferner ebene Figuren, z. B. Dreieck, Viereck u. s. w. Von der Planimetrie ausgeschlossen und der Stereometrie vorbehalten sind dagegen: alle Körper, die krummen Flächen, z. B. die Kugelfläche, Kegelfläche u. dgl. m., und solche krumme Linien, wie die Schraubenlinie, welche nicht in einer Ebene liegen.

Ein Theil der Geometrie ist die Longimetrie, welche dasjenige zu ihrem Gegenstande hat, was in derselben geraden Linie liegend vorgestellt werden kann. Weil aber dieser Zweig eine zu geringe Zahl von Sätzen hat, so wird er gewöhnlich nicht besonders aufgeführt, sondern bildet die ersten Sätze der Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Von den Linien.

Bemerkung. Gerade Linien können in Hinsicht ihrer Lage und in Hinsicht ihrer Größe mit einander verglichen werden; krumme Linien können außerdem noch in der Gestalt von einander verschieden sein. Auf jene beiden Verhältnisse beziehen sich die Grundsätze §§. 4 und 6.

§. 4. Grundsatz.

Die Lage einer geraden Linie ist durch zwei Punkte gegeben; d. h. zwischen zwei Punkten läßt sich nur eine einzige gerade Linie ziehen.

Dagegen lassen sich zwischen zwei gegebenen Punkten unzählig viele krumme Linien ziehen.

Anm. Zwischen zwei Punkten läßt sich allemal eine gerade Linie ziehen; dagegen kann nicht durch jede drei Punkte eine gerade Linie gelegt werden.

§. 5. Zusatz.

Zwei gerade Linien können nur einen Punkt gemeinschaftlich haben; man sagt dann: sie durchschneiden sich.

§. 6. Grundsatz.

Die gerade Linie ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte.

Bemerkung. Gerade Linien können begrenzt und unbegrenzt gedacht werden. Begrenzte gerade Linien können in Hinsicht ihrer Größe mit einander verglichen werden; um z. B. zu untersuchen, ob die Linie AB (Fig. 1) gleich CD ist, lege ich die eine AB so auf die andere CD, daß der Endpunkt A auf C fällt, und sehe dann zu, wo der Endpunkt B hinfällt; wenn dieser gerade auf D fällt, so ist $AB = CD$; wenn aber der Endpunkt B über D hinaus fällt, z. B. auf E (Fig. 2), so ist $AB > CD$, und wenn der Endpunkt B zwischen C und D fällt, z. B. auf F (Fig. 3), so ist $AB < CD$.

Hieraus ergiebt sich die folgende Erklärung.

§. 7. Erklärung.

Zwei (begrenzte) gerade Linien sind gleich ($AB = CD$, Fig. 1), wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß beide Paar Endpunkte (A auf C und B auf D) zusammen fallen; — eine Linie ist größer, als eine andere ($AB > CD$, Fig. 2), wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß ein Paar Endpunkte (A und C) zusammen fallen, der zweite Endpunkt (B) der ersten Linie aber über den zweiten Endpunkt (D) der andern Linie hinausfällt; und eine Linie ist kleiner, als eine andere ($AB < CD$, Fig. 3), wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß ein Paar Endpunkte (A und C) zusammen fallen, der zweite Endpunkt (B) der ersten Linie aber zwischen die beiden Endpunkte (C und D) der andern Linie fällt.

Bemerkung. Wenn im Folgenden das Wort Linie ohne Beisatz gebraucht wird, so ist in der Regel darunter die gerade Linie zu verstehen.

§. 8. Erklärung.

Von den krummen Linien betrachten wir hier nur den Kreis. — Der Kreis ist eine in sich selbst zurücklaufende krumme Linie, deren Punkte sämmtlich von einem innerhalb liegenden Punkte gleichen Abstand haben. Dieser Punkt (C, Fig. 4) heißt Mittelpunkt, und eine Linie (AC), welche den Mittelpunkt mit einem Punkte des Kreises verbindet, wird Radius oder Halbmesser genannt. Eine jede zwischen zwei Punkten des Kreises gezogene Linie (EF) heißt Sehne, und wenn die Sehne (GH) durch den Mittelpunkt geht, Durchmesser.

Ein Kreis entsteht, wenn man eine gerade Linie um den einen Endpunkt so lange herumdreht, bis sie wieder in ihre frühere Lage zurückkehrt, der andere Endpunkt dieser Linie beschreibt einen Kreis.

Anm. In den mathematischen Lehrbüchern versteht man unter dem Kreise gewöhnlich die von der Kreislinie eingeschlossene Figur. Für die hier gegebene Erklärung spricht: 1) der gewöhnliche Sprachgebrauch des gemeinen Lebens; 2) der wissenschaftliche Sprachgebrauch (zwei Kreise schneiden sich oder berühren sich von Innen, was offenbar nur auf die Kreislinien, nicht auf die Flächen bezogen werden kann); 3) die größere Bequemlichkeit und Kürze, da man es in der Geometrie unvergleichlich öfter mit der Kreislinie, als mit der Kreisfläche zu thun hat; 4) die Analogie; — unter den Benennungen: Ellipse, Parabel, Lemniscate, Cycloide u. s. w. versteht Niemand Flächen, sondern Linien.

§. 9. Zusatz.

1) Alle Radien eines Kreises sind gleich.

2) Der Durchmesser ist das Doppelte des Radius.

3) Daher sind auch alle Durchmesser desselben Kreises einander gleich.

4) Kreise, welche mit denselben Radien beschrieben sind, decken sich, d. h. man kann sich dieselben so auf einander gelegt denken, daß alle Punkte des einen Kreises auf den andern Kreis fallen.

§. 10. Zusatz.

Wenn ein Punkt A (Fig. 4) auf dem Kreise gegeben ist, und ich verbinde diesen Punkt A mit dem Mittelpunkte C, so ist die Verbindungslinie AC ein Radius; wenn aber der Punkt B außerhalb des Kreises liegt, so ist die Verbindungslinie BC größer, als der Radius AC, und wenn der Punkt D innerhalb des Kreises liegt, so ist die Verbindungslinie CD kleiner, als der Radius AC. — Hieraus ergiebt sich umgekehrt:

1) Ein Punkt liegt auf dem Kreise, wenn sein Abstand vom Mittelpunkte dem Radius gleich ist.

2) Ein Punkt liegt außerhalb des Kreises, wenn sein Abstand vom Mittelpunkte größer ist, als der Radius.

3) Ein Punkt liegt innerhalb des Kreises, wenn sein Abstand vom Mittelpunkte kleiner ist, als der Radius.

§. 11. Erklärung.

Ein Theil eines Kreises heißt ein Bogen.

Zwei Bogen, welche mit demselben Radius beschrieben sind (AB und DE, Fig. 15), sind gleich, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß ihre Mittelpunkte (C und F) und ihre Endpunkte (A und D und B und E) zusammenfallen. — Ein Bogen ist größer, als ein anderer, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß die Mittelpunkte und ein Paar Endpunkte zusammenfallen, der zweite Endpunkt des ersten Bogens aber über den zweiten Endpunkt des andern Bogens hinausfällt; — und ein Bogen ist kleiner, als ein anderer, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß ihre Mittelpunkte und ein Paar Endpunkte zusammenfallen, der zweite Endpunkt des ersten Bogens aber zwischen die Endpunkte des andern Bogens fällt.

Anm. Wie sich Bogen solcher Kreise, welche mit verschiedenen Radien beschrieben sind, vergleichen lassen, kann erst weiter unten in dem Abschnitte, welcher von der Ausmessung des Kreises handelt, gezeigt werden.

§. 12. Zusatz.

Jeder Durchmesser theilt den Kreis in zwei gleiche Bogen, welche man Halbkreise nennt.

§. 13. Erklärung.

Man pflegt den Kreis in 360 gleiche Theile zu theilen und einen solchen Theil einen Grad zu nennen; den Grad theilt man wieder in 60 gleiche Theile und nennt diese Theile Minuten; die Minute theilt man in 60 Secunden u. s. w. Einen Bogen von 37 Graden 28 Minuten und 9 Secunden drückt man kürzer so aus: $37^0\ 28'\ 9''$.

Einen Bogen von 90^0 oder den vierten Theil des ganzen Kreises nennt man einen Quadranten — Sextant — Octant ꝛc.

§. 14. Erklärung.

Eine unbegrenzte Linie (AB) durchschneidet einen Kreis (Fig. 5), wenn die Linie theils innerhalb, theils außerhalb des Kreises liegt, und eine Linie (EF) berührt den Kreis und wird Tangente genannt, wenn sie nur einen Punkt (G) mit demselben gemeinschaftlich hat und übrigens ganz außerhalb des Kreises liegt.

§. 15. Zusatz.

Eine Linie AB (Fig. 5), welche durch einen Punkt D innerhalb des Kreises geht, muß denselben zweimal durchschneiden, — weil der Kreis geschlossen, die Linie aber nach zwei Seiten unbegrenzt ist.

§. 16. Erklärung.

Zwei Kreise können überhaupt eine fünffache Lage gegen einander haben; sie können sich schneiden (Fig. 98), sie können sich berühren von Außen (Fig. 97) oder von Innen (Fig. 99), und ein Kreis kann ganz außerhalb (Fig. 96) oder ganz innerhalb (Fig. 100) des andern Kreises liegen, ohne mit demselben zusammenzutreffen *).

Zwei Kreise durchschneiden sich (Fig. 98), wenn jeder theils innerhalb, theils außerhalb des andern liegt.

---

*) Die Beweise für diese vorläufigen Behauptungen folgen weiter unten in den §§. 153 — 155.

Zwei Kreise berühren sich von Außen (Fig. 97), wenn beide nur einen Punkt gemeinschaftlich haben und übrigens jeder ganz außerhalb des andern liegt.

Zwei Kreise berühren sich von Innen (Fig. 99), wenn sie nur einen Punkt gemeinschaftlich haben und übrigens der eine ganz innerhalb des andern liegt.

Zwei Kreise, welche denselben Mittelpunkt haben, werden concentrisch, wenn sie verschiedene Mittelpunkte haben, excentrisch genannt.

Zweiter Abschnitt.

Von den Winkeln.

---

§. 17. Erklärung.

Wenn man in einer unbegrenzten Ebene einen beliebigen Punkt A (Fig. 6) annimmt, von diesem Punkte aus zwei Linien zieht, AB und AC, und sich dieselben unbegrenzt fortlaufend denkt, so schneiden diese beiden Linien von der unbegrenzten Ebene ein Stück aus, welches sich nach einer Seite hin ins Unendliche erstreckt, nach zwei Seiten aber durch die Linien AB und AC begrenzt wird. Man nennt dasselbe einen Winkel.

Ein Winkel ist also eine ebene Fläche, welche zwischen zwei Linien liegt, die von einem Punkte ausgehen und ins Unendliche fortlaufen. — Die Linien, welche den Winkel begrenzen, heißen seine Schenkel, und der Punkt, welchen sie gemeinschaftlich haben, wird Scheitel genannt.

Ein Winkel entsteht, wenn man sich den einen Schenkel (AB, Fig. 6) um den Scheitel (A) so lange herumgedreht denkt, bis er in die Lage des andern Schenkels (AC) kommt.

Anm. 1. Man bezeichnet die Winkel auf dreierlei Art: 1) durch einen Buchstaben, welchen man in die Nähe des Scheitels zwischen beide Schenkel schreibt, — 2) durch einen Buchstaben, welchen man in die Nähe des Scheitels außerhalb der Schenkel des Winkels schreibt. Weil aber diese Bezeichnungsarten für den Fall, daß an demselben Scheitelpunkte mehrere Winkel liegen, nicht ausreichen, so wendet man noch folgende Bezeichnungsart an: — 3) durch drei Buchstaben, von denen man einen A an den Scheitel, die andern B und C an beliebige Punkte der beiden Schenkel BA und CA schreibt (Fig. 6), und nennt nun diesen Winkel entweder BAC oder CAB, so nehmlich, daß jedesmal der am Scheitel stehende Buchstabe A in die Mitte kommt.

Anm. 2. Da die Schenkel eines Winkels unbegrenzt fortlaufend gedacht werden, so ist es gar nicht möglich, einen Winkel vollständig zu zeichnen; die gezeichneten Schenkel sind immer nur Theile der in's Unendliche fortlaufenden Schenkel; hierbei ist es für die Größe des Winkels ganz einerlei, ob man diese Theile länger oder kürzer zeichnet, weil, wie gesagt, die wirklichen Schenkel des Winkels in's Unendliche fortlaufend gedacht werden.

Bemerkung. Wenn ich zwei Winkel ABC und DEF (Fig. 7) in Hinsicht ihrer Größe vergleichen will, so denke ich mir dieselben so auf einander gelegt, daß der Scheitelpunkt B auf E und der eine Schenkel BC auf EF fällt, und sehe nun zu, wo der andere Schenkel AB hinfällt; wenn AB

gerade auf DE fällt, so ist Winkel ABC = DEF; wenn aber AB über DE hinaus, z. B. auf EG fallen sollte, dann wäre Winkel ABC > DEF, und wenn AB zwischen DE und EF, z. B. auf EH fallen sollte, dann wäre Winkel ABC < DEF. Hieraus ergiebt sich die folgende Erklärung.

§. 18. Erklärung.

Zwei Winkel sind gleich, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß ihre Scheitel und beide Paar Schenkel zusammenfallen. — Ein Winkel ist größer, als ein anderer, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß die Scheitelpunkte und ein Paar Schenkel zusammenfallen, der zweite Schenkel des ersten Winkels aber über den zweiten Schenkel des andern Winkels hinaus fällt. — Ein Winkel ist kleiner, als ein anderer, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß ihre Scheitelpunkte und ein Paar Schenkel zusammenfallen, der zweite Schenkel des ersten Winkels aber zwischen die beiden Schenkel des andern Winkels fällt.

Bemerkung. Wenn ich mir die Linie AB (Fig. 8) um den festen Endpunkt A herumgedreht denke, bis sie in die Lage AC kommt, so entsteht der Winkel CAB; drehe ich noch weiter bis in die Lage AD, so erhalte ich den Winkel DAB, welcher aus den beiden Winkeln CAB und DAC besteht u. s. f. Unter den Winkeln, welche so entstehen können, ist mir besonders der Winkel EAB merkwürdig, dessen zweiter Schenkel AE mit AB eine gerade Linie bildet. Man nennt diesen Winkel einen flachen; er besteht hier in der Figur aus den drei Theilen CAB, DAC und EAD.

§. 19. Erklärung.

Ein flacher Winkel ist ein solcher, dessen beide Schenkel eine gerade Linie bilden.

Ein flacher Winkel entsteht, wenn man eine gerade Linie, welche in einem Punkte begrenzt, nach der andern Seite hin unbegrenzt gedacht wird, um diesen einen Punkt so lange herumdreht, bis sie in die Verlängerung ihrer ursprünglichen Lage fällt.

Man pflegt den flachen Winkel mit dem griechischen Buchstaben π (Pi) zu bezeichnen.

§. 20. Zusatz.

Alle flachen Winkel sind einander gleich. — Denn sie lassen sich so auf einander legen, daß Scheitel und Schenkel sich decken.

Bemerkung. Wenn ich fortfahre, die Linie AB (Fig. 8), nachdem sie die Lagen AC, AD, AE durchlaufen hat, noch weiter um den Punkt A zu drehen, etwa bis in die Lage AF, so entsteht ein Winkel FAB, welcher den flachen Winkel EAB um das Stück EAF übertrifft. Man nennt einen solchen Winkel einen erhabenen.

§. 21. Erklärung.

Ein Winkel, welcher größer ist, als ein flacher, wird ein erhabener, und ein Winkel, welcher kleiner, als ein flacher Winkel ist, wird ein hohler Winkel genannt.

Im Folgenden wird vorzugsweise von hohlen Winkeln die Rede sein, und so oft das Wort Winkel ohne Beisatz gebraucht wird, ist allemal der hohle Winkel gemeint.

§. 22. Erklärung.

Zwei (hohle) Winkel (ABC und ABD, Fig. 9), welche den Scheitelpunkt (B) und einen Schenkel (AB) gemeinschaftlich haben, und bei denen die beiden anderen Schenkel (BC und BD) eine gerade Linie bilden, heißen Nebenwinkel.

Uebungsfrage. Wie zeichnet man zu einem gegebenen Winkel den zugehörigen Nebenwinkel?

§. 23. Zusatz.

1) Zwei Nebenwinkel ABC und ABD (Fig. 9) betragen zusammen einen flachen Winkel CBD. — Hieraus folgt weiter:

2) Gleiche Winkel haben auch gleiche Nebenwinkel; — ist z. B. Winkel $m = n$ (Fig. 10), so muß auch $p = q$ sein.

3) Der größere Winkel hat einen kleineren Nebenwinkel; — wenn z. B. Winkel $m > n$ ist (Fig. 11), so muß dagegen $p < q$ sein.

§. 24. Erklärung.

Zwei (hohle) Winkel (ABC und DBE, Fig. 12), welche den Scheitelpunkt (B) gemeinschaftlich haben, und bei denen die gegenüberstehenden Schenkel (AB und BE — und BC und BD) gerade Linien bilden, heißen Scheitelwinkel.

Anm. Auch die Winkel CBE und ABD sind Scheitelwinkel.

Uebungsfrage. Wie zeichnet man zu einem gegebenen Winkel den zugehörigen Scheitelwinkel?

§. 25. Lehrsatz.

Scheitelwinkel sind einander gleich.

Beweis. Um zu zeigen, daß der Winkel ABC = DBE (Fig. 12) ist, nehme ich den Winkel CBE zu Hülfe. Dieser bildet mit ABC den flachen Winkel ABE und mit DBE den flachen Winkel CBD. Nehme ich nun von beiden flachen Winkeln den Winkel CBE weg, so bleibt das eine Mal Winkel ABC und das andere Mal DBE übrig. Da ich Gleiches von Gleichem weggenommen habe, so muß auch Gleiches übrig bleiben; folglich ist Winkel ABC = DBE.

Bemerkung. Einen Satz erweisen heißt ihn auf frühere Sätze zurückführen.

§. 26. Erklärung.

Ein rechter Winkel (ABC, Fig. 13) ist ein solcher Winkel, welcher seinem Nebenwinkel (ABD) gleich ist.

Der rechte Winkel ist also die Hälfte des flachen und wird gewöhnlich mit R bezeichnet.

§. 27. Zusatz.

Da nach dem vorhergehenden §. jeder rechte Winkel die Hälfte eines flachen Winkels ist, so müssen alle rechten Winkel einander gleich sein, weil wir schon gesehen haben, daß alle flachen Winkel gleich sind.

Uebungsfrage. Wie verfährt man im Praktischen, um zu untersuchen, ob ein Winkel ein rechter ist?

§. 28. Erklärung.

(Hohle) Winkel, welche nicht rechte Winkel sind, nennt man schiefe Winkel, sie zerfallen wieder in spitze und stumpfe; und zwar heißt ein

Winkel spitz, wenn er kleiner, stumpf, wenn er größer ist, als ein rechter Winkel.

§. 29. Zusatz.

1) Zwei rechte Winkel (ABC und ABD, Fig. 13) machen zusammen einen flachen (DBC) aus.

2) Ein spitzer Winkel (ABC, Fig. 9) hat einen stumpfen (ABD) und ein stumpfer Winkel (ABD) hat einen spitzen (ABC) zum Nebenwinkel; — denn so viel dem einen zum rechten Winkel fehlt, so viel muß der andere größer sein, als ein rechter, weil beide zusammen einen flachen oder zwei rechte Winkel ausmachen.

§. 30. Erklärung.

Zwei Linien (AB und CD, Fig. 13) stehen auf einander senkrecht, wenn sie rechte Winkel bilden; man sagt auch wohl, die eine (AB) ist ein Loth auf der andern (CD).

Eine Linie (AB, Fig. 9) steht schief auf einer andern (CD), wenn sie mit einander schiefe Winkel bilden.

§. 31. Zusatz.

Auf einer Linie kann in dem nehmlichen Punkte nur ein Loth errichtet werden.

Beweis. Wenn die Linien AF und AE (Fig. 14) beide auf AB in dem Punkte A senkrecht stehen sollten, so müßten die Winkel FAB und EAB beide rechte, also einander gleich sein, was doch nicht der Fall ist, da Winkel FAB offenbar größer, als EAB ist. Demnach kann von den beiden Linien AF und AE nur die eine (AF) auf AB senkrecht stehen.

Bemerkung. Wenn man in einer Linie AB (Fig. 14), welche von einem festen Punkte A ausgehend, nach der andern Seite aber unbegrenzt fortlaufend gedacht wird, einen willkürlichen Punkt C annimmt und hierauf die Linie um den Punkt A dreht, bis sie irgend eine andere Lage AD erreicht, so beschreibt der Punkt C einen Kreisbogen CE, während durch die Drehung der Linie selbst der Winkel BAD erzeugt worden ist. Der Scheitelpunkt A dieses Winkels fällt mit dem Mittelpunkte des Bogens zusammen, und die Schenkel des Winkels AB und AD gehen durch die Endpunkte des Bogens C und E.

§. 32. Erklärung.

Ein Winkel, dessen Scheitel in den Mittelpunkt eines Bogens fällt, und dessen Schenkel durch die Endpunkte dieses Bogens gehen, wird der zum Bogen gehörige Centriwinkel genannt.

Bemerkung. In den nächstfolgenden Sätzen, in welchen Centriwinkel und Bogen verglichen werden, ist durchgehends angenommen, daß alle Bogen mit demselben Radius beschrieben sind.

§. 33. Lehrsatz.

Zu gleichen Bogen gehören auch gleiche Centriwinkel, und zum größeren Bogen gehört auch ein größerer Centriwinkel.

Beweis. Wenn der Bogen AB = DE (Fig. 15) ist, so muß auch Centriwinkel ACB = DFE sein. — Denn da die Bogen AB und DE als

gleich vorausgesetzt sind, so lassen sie sich so auf einander legen, daß ihre Mittelpunkte und Endpunkte zusammenfallen, nehmlich C auf F, B auf E und A auf D. — Nun fällt auch die Linie BC auf EF, weil der Punkt B auf E und C auf F gefallen ist, und die Linie AC fällt auf DF, weil der Punkt A auf D und C auf F gefallen ist; demnach ist Winkel ACB = DFE, weil Scheitel und Schenkel des einen mit Scheitel und Schenkel des andern zusammengefallen sind.

Eben so läßt sich zeigen, daß, wenn der Bogen AB > DE wäre, auch der zugehörige Centriwinkel ACB > DFE sein müßte.

§. 34. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden §. folgt leicht weiter (oder läßt sich in ähnlicher Art erweisen):

Gleiche Centriwinkel haben auch gleiche Bogen, und der größere Centriwinkel hat auch einen größeren Bogen.

§. 35. Zusatz.

Der Centriwinkel eines Halbkreises ist allemal ein flacher und der Centriwinkel eines Quadranten ein rechter Winkel.

Man pflegt den rechten Winkel, so wie den Quadranten, in 90 gleiche Theile zu theilen und diese Theile ebenfalls Grade zu nennen; weiter theilt man auch bei den Winkeln den Grad in 60 Minuten und die Minute in 60 Secunden. Man sieht hiernach leicht ein, daß jeder Winkel eben so viele Grade, Minuten und Secunden enthält, als ein Kreisbogen, welchen man aus dem Scheitelpunkte des Winkels zwischen den Schenkeln desselben beschreibt.

Anm. 1. Es sei z. B. der Winkel DAB (Fig. 14) gegeben und zwischen seinen Schenkeln aus dem Scheitel A der Bogen CE beschrieben. Man denke sich den Bogen CE bis zum Quadranten CF vervollständigt, diesen in seine 90^0 getheilt, und nehme an, es kämen auf den Bogen CE 57^0. Verbinden wir nun sämmtliche Theilungspunkte mit dem Scheitelpunkte A, so ist jetzt auch der rechte Winkel FAB nach §. 33 in 90 gleiche Theile getheilt, und auf den Winkel DAB kommen 57 dieser Theile. Demnach enthält der Centriwinkel DAB eben so viel Grade, als der Bogen CE.

Weiter unten werden wir ganz allgemein zeigen, daß 1) Bogen, welche mit denselben Radien beschrieben sind, sich wie ihre Centriwinkel verhalten und 2) daß Kreisbogen, welche mit verschiedenen Radien zwischen den Schenkeln eines Winkels aus dem Scheitelpunkte beschrieben sind, zu den zugehörigen ganzen Kreisen das nämliche Verhältniß haben. —

Anm. 2. Auf den vorhergehenden Sätzen beruht die Einrichtung und der Gebrauch des Transporteurs, eines in Grade eingetheilten Halbkreises, welchen man dazu anwendet, Winkel auszumessen und abzuzeichnen. —

Uebungsfrage. Wie verfährt man im Praktischen, um mit Hülfe des Transporteurs einen Winkel abzuzeichnen?

Dritter Abschnitt.

Von parallelen Linien.

§. 36. Erklärung.

Zwei Linien, welche in einer Ebene liegen und sich, wenn sie auch noch so weit verlängert werden, nicht schneiden, heißen parallel*).

Wenn zwei Linien AB und CD (Fig. 1) parallel sind, so wird dies durch AB || CD (lies: AB parallel CD) bezeichnet.

§. 37, a. Erklärung.

Wenn zwei Linien AB und AC (Fig. 6) sich schneiden, so haben sie verschiedene Richtungen, und ihre Richtungen weichen um so mehr von einander ab, je größer der Winkel CAB ist, welchen die Linien einschließen. Wenn dagegen der Winkel CAB abnimmt, so weichen die Richtungen AB und AC um so weniger von einander ab, je kleiner dieser Winkel ist, und zwei (unbegrenzte) Linien AB und CD (Fig. 1), welche sich gar nicht schneiden und also keinen Winkel bilden, mit einem Worte: zwei parallele Linien haben dieselbe Richtung.

§. 37, b. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden §. folgt:

1) Zwei Linien, welche einer dritten parallel sind, sind auch unter sich parallel, und

2) eine Linie, welche die eine von zwei parallelen Linien schneidet, muß auch die andere schneiden.

3) Durch einen Punkt außerhalb einer Linie läßt sich mit derselben nur eine einzige Parallele ziehen.

§. 38. Erklärung.

Wenn man untersuchen will, ob zwei Linien parallel sind, so pflegt man sie mit einer dritten zu durchschneiden; auf diese Art entstehen acht hohle Winkel, welche man zunächst in äußere (a, b, g und h, Fig. 16) und innere (c, d, e und f) eintheilen kann. Ferner werden ein äußerer und ein innerer Winkel (in der Figur a u. e, b u. f, c u. g und d u. h), welche an derselben Seite der schneidenden Linie und der parallelen Linien liegen, Gegenwinkel, — zwei äußere Winkel aber (wie a u. g und b u. h) oder zwei innere Winkel (wie c u. e und d u. f), welche an entgegengesetzten Seiten der schneidenden Linie liegen, Wechselwinkel genannt; und endlich sollen zwei äußere Winkel (wie a u. h und b u. g) oder zwei innere Winkel (wie c u. f und d u. e), welche an derselben Seite der schneidenden Linie liegen, Ergänzungswinkel heißen.

Obschon man von diesen Benennungen vorzugsweise nur bei parallelen Linien Gebrauch macht, so wendet man dieselben doch zuweilen auch bei solchen Linien an, welche von der parallelen Richtung abweichen.

---

*) παράλληλος (von παρά und ἀλλήλων) neben einander laufend.

§. 39. Lehrsatz.

Bei parallelen Linien sind die Gegenwinkel gleich.

Beweis. Die parallelen Linien seien AB und CD (Fig. 16), und es soll bewiesen werden, daß Winkel a = e, b = f, c = g und d = h ist. — Wir wollen zunächst beweisen, daß Winkel a = e ist. Der Winkel a giebt an, wie viel die Linie AB von der schneidenden EF (rechts oben) abweicht, und der Winkel e zeigt an, wie viel die Linie CD von der schneidenden EF an der nehmlichen Seite abweicht. Da die Linien AB und CD als parallel vorausgesetzt sind, so müssen sie auch von der schneidenden EF an der nehmlichen Seite gleich viel abweichen. Folglich muß Winkel a=e sein.

Weiter ergiebt sich hieraus auch leicht, daß Winkel b = f ist. Denn der Winkel b ist der Nebenwinkel von a, und Winkel f ist der Nebenwinkel von e. Da nun a = e erwiesen ist, so muß auch b = f sein; denn gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel.

Eben so läßt sich (mit Benutzung des schon Erwiesenen) zeigen, daß Winkel c = g und d = h ist.

§. 40. Zusatz.

Bei parallelen Linien sind auch die Wechselwinkel gleich.

Beweis. Wenn die Linien AB und CD (Fig. 16) als parallel vorausgesetzt sind, so läßt sich zeigen, daß Winkel a = g, b = h, c = e und d = f ist. — Wir wollen dieses z. B. für die Wechselwinkel a und g erweisen. Der Winkel a ist = e, weil wir schon (im vorhergeh. §.) gesehen haben, daß bei parallelen Linien die Gegenwinkel gleich sind, und der Winkel e ist = g als Scheitelwinkel; folglich ist auch a = g.

Ganz eben so läßt sich auch die Gleichheit der übrigen Wechselwinkel darthun.

§. 41. Zusatz.

Bei parallelen Linien beträgt jedes Paar der Ergänzungswinkel einen Flachen.

Beweis. Die parallelen Linien seien AB und CD (Fig. 16), und es soll bewiesen werden, daß Winkel $a+h = \pi$, ferner $b+g = \pi$, $c+f = \pi$ und $d+e = \pi$ ist. — Um dieses z. B. für die Ergänzungswinkel a und h zu zeigen, verknüpfen wir den Winkel a zunächst mit dem zugehörigen Nebenwinkel d. Die Winkel a und d bilden zusammen einen Flachen, als Nebenwinkel; statt des Winkels d können wir aber auch h setzen, weil wir schon (in §. 39) gesehen haben, daß bei parallelen Linien die Gegenwinkel gleich sind. Folglich bilden auch a und h einen Flachen.

Ganz eben so läßt sich das Nehmliche für die übrigen Ergänzungswinkel erweisen.

Bemerkung. Die drei über parallele Linien erwiesenen Sätze (§. 39 — 41) gelten auch umgekehrt, wie in den nächstfolgenden Paragraphen (§. 42 — 44) gezeigt wird.

§. 42. Lehrsatz.

Zwei Linien müssen parallel sein, wenn ein Paar Gegenwinkel als gleich gegeben sind.

Beweis. Es sei Winkel a = e (Fig. 16) vorausgesetzt, und es soll bewiesen werden, daß die Linien AB und CD parallel sind. — Die Linie

AB weicht von der Linie EF (rechts oben) um den Winkel a ab, und die Linie CD weicht von EF an der nehmlichen Seite um den Winkel e ab. Da nun Winkel $a = e$ vorausgesetzt, so weichen die Linien AB und CD von der schneidenden Linie EF an der nehmlichen Seite gleich viel ab; folglich sind sie parallel.

§. 43. Zusatz.

Zwei Linien müssen auch dann parallel sein, wenn ein Paar Wechselwinkel (z. B. a und g, Fig. 16) als gleich vorausgesetzt sind.

Beweis. Wir brauchen hier nur die Gleichheit von ein Paar Gegenwinkeln zu erweisen. — Der Winkel a ist $= g$ vorausgesetzt, und der Winkel g ist $= e$ als Scheitelwinkel; folglich ist auch $a = e$. — Da wir nun ein Paar Gegenwinkel als gleich erwiesen haben, so sind die Linien nach dem vorhergehenden §. parallel.

§. 44. Zusatz.

Zwei Linien sind endlich auch dann gewiß parallel, wenn ein Paar Ergänzungswinkel einen Flachen betragen, (also wenn z. B. $a + h = \pi$, Fig. 16, vorausgesetzt ist).

Beweis. Auch hier suchen wir ein Paar Gegenwinkel als gleich zu erweisen. — Die Winkel a und h bilden einen Flachen nach der Voraussetzung, und die Winkel a und d bilden ebenfalls einen Flachen, als Nebenwinkel. Nehmen wir nun von beiden Flachen den Winkel a weg, so bleibt einmal der Winkel d, das andere Mal der Winkel h übrig; folglich ist $d = h$; denn Gleiches von Gleichem weggenommen, läßt Gleiches. Da wir nun ein Paar Gegenwinkel als gleich erwiesen haben, so sind die Linien AB und CD nach dem vorvorhergehenden Satze (§. 42) parallel.

Anm. 1. Aus den Beweisen der §§. 39 — 44 geht auch noch — ganz unabhängig von dem Parallelismus der beiden Linien AB und CD (Fig. 16), welche von einer dritten EF durchschnitten werden — hervor, daß, wenn ein Paar Gegenwinkel oder ein Paar Wechselwinkel als gleich gegeben sind, oder wenn ein Paar Ergänzungswinkel einen Flachen betragen, auch die übrigen Gegenwinkel und die Wechselwinkel gleich sind, und jedes Paar der Ergänzungswinkel einen Flachen beträgt. Wenn also von den folgenden zwölf Behauptungen

1) $a = e$	5) $a = g$	9) $a + h = \pi$
2) $b = f$	6) $b = h$	10) $b + g = \pi$
3) $c = g$	7) $c = e$	11) $c + f = \pi$
4) $d = h$	8) $d = f$	12) $d + e = \pi$

irgend eine gegeben ist, so ergeben sich hieraus die übrigen 11 als leicht zu erweisende Folgerungen.

Anm. 2. Von den im Vorhergehenden über parallele Linien aufgeführten Sätzen §. 37, a bis 44 ist §. 37, b als sich von selbst verstehend ohne Beweis hingestellt, und die Beweise für §. 39 und 42 sind streng genommen nur Veranschaulichungen des Inhalts dieser Sätze; die in §. 37, a gegebene Erklärung aber schließt eigentlich schon den Lehrsatz in sich, daß parallele Linien mit einer jeden schneidenden Linie gleiche Gegenwinkel bilden. Nun läßt sich §. 42, wie wir sogleich zeigen werden, allerdings ganz streng erweisen; dagegen fehlt für die Behauptungen der §§. 37, a und 39 *) der wis-

---

*) Einen der gelungensten Versuche eines Beweises findet man in: Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie, 1855, S. 12.

senschaftliche Beweis. Dieser Beweis würde, wenn er geführt werden sollte, sich wesentlich auf den Begriff der geraden Linie zu stützen haben, und da für diese keine Definition vorhanden ist, auch nicht füglich vorhanden sein kann, indem die Vorstellung der geraden Linie eine einfache, unmittelbar gegebene ist, so läßt sich mit Sicherheit annehmen, daß auch in Zukunft kein ganz strenger Beweis für diese Sätze gefunden werden wird. Es bleibt daher nichts übrig, als einen derselben, gleichgiltig welchen, da sich aus dem einen leicht der andere herleiten läßt, als Grundsatz anzunehmen. — Demgemäß führen wir die Sätze über parallele Linien hier nochmals auf.

1. Lehrsatz. Wenn zwei Linien AB und CD (Fig. 17) von einer dritten EF durchschnitten werden, und ein Paar Gegenwinkel oder ein Paar Wechselwinkel als gleich gegeben sind, oder ein Paar Ergänzungswinkel einen Flachen betragen, so sind die Linien AB und CD parallel.

Beweis. Wenn zunächst ein Paar Wechselwinkel BGH und CHG als gleich gegeben sind, so ist, wie leicht zu sehen, auch Winkel AGH = DHG und daher die Linienverbindung AGHC der Linienverbindung DHGB congruent. Denn wenn wir uns die eine mit der andern so zusammengelegt denken, daß der Punkt H auf G und G auf H fällt, so muß auch BG auf CH und DH auf AG fallen, weil Winkel BGH = CHG und DHG = AGH ist. Wenn nun die Schenkel AG und CH sich in einem Punkte schnitten, so müßten sich auch die Schenkel DH und BG in dem nehmlichen Punkte schneiden, und es schnitten sich folglich die ganzen Linien AB und CD in zwei Punkten, was nach §. 5 unmöglich ist. Da sich nun eben so wenig die Schenkel BG und DH durchschneiden können, so sind folglich die Linien AB und CD parallel.

Daß aber die Linien AB und CD auch parallel sein müssen, wenn ein Paar Gegenwinkel als gleich vorausgesetzt sind, oder wenn ein Paar Ergänzungswinkel einen Flachen betragen, geht daraus hervor, weil dann auch (nach Anm. 1) die Wechselwinkel gleich sind.

2. Grundsatz. Durch einen Punkt außerhalb einer Linie läßt sich mit derselben nur eine Parallele ziehen.

Wenn daher zwei Linien α und β parallel sind, und die eine α von einer dritten γ durchschnitten wird, so wird auch die andere β von der dritten γ durchschnitten. — Denn wenn γ mit β parallel wäre, so gingen durch einen Punkt zwei sich schneidende Linien α und γ, welche beide einer dritten β parallel wären; — und wenn zwei Linien α und β einer dritten γ parallel sind, so können sie (aus dem eben angeführten Grunde) sich nicht schneiden und sind folglich parallel.

3. Zusatz. Wenn zwei parallele Linien KL und CD (Fig. 18) von einer dritten EH durchschnitten werden, so sind die Gegenwinkel gleich, die Wechselwinkel sind gleich und jedes Paar Ergänzungswinkel beträgt einen Flachen.

Beweis. Denn wenn ein Paar Gegenwinkel ungleich wären, wenn z. B. Winkel EFK > EGC wäre, so ließe sich von dem größeren Winkel EFK der kleinere EGC = EFA abschneiden; dann müßte nach Nr. 1 die Linie AB mit CD parallel laufen, was nach Nr. 2 nicht möglich ist, da KL parallel CD vorausgesetzt ist.

Da nun ein Paar Gegenwinkel als gleich erwiesen sind, so müssen (nach Anm. 1) auch die übrigen Gegenwinkel und die Wechselwinkel gleich sein, und jedes Paar Ergänzungswinkel einen Flachen betragen.

Bemerkung. Aus §. 42 — 44 folgt, daß bei Linien, welche sich schneiden, weder die Gegenwinkel, noch die Wechselwinkel gleich sein, noch die Ergänzungswinkel einen Flachen betragen können. Von den besonderen

Sätzen, welche sich hierüber aufstellen ließen, heben wir hier nur denjenigen heraus, welcher die meiste Anwendung findet.

§. 45. Lehrsatz.

Wenn zwei sich schneidende Linien von einer dritten durchschnitten werden, so betragen die inneren Ergänzungswinkel an der Seite, an welcher sich die Linien schneiden, weniger, an der entgegengesetzten Seite mehr, als einen Flachen.

Beweis. Die gegebenen Linien seien AB und CD (Fig. 18), welche über B und D gehörig verlängert sich schneiden; und es soll bewiesen werden, daß Winkel BFG + DGF $< \pi$, aber AFG + CGF $> \pi$ ist. — Um dieses zu zeigen, ziehe ich durch den Punkt F mit CD eine Parallele KL; dann betragen die Winkel LFG und DGF zusammen einen Flachen, als innere Ergänzungswinkel bei parallelen Linien. Der Winkel BFG ist aber kleiner, als der Winkel LFG (um das Stück LFB); folglich müssen die Winkel BFG und DGF zusammen weniger, als einen Flachen betragen. — An der andern Seite betragen die Winkel KFG und CGF zusammen einen Flachen, (weil KL $\parallel$ CD ist); folglich betragen die Winkel AFG und CGF mehr, als einen Flachen (um das Stück AFK).

Bemerkung. Durch Umkehrung des vorhergehenden Satzes entsteht der folgende.

§. 46. Lehrsatz.

Wenn zwei Linien AB und CD (Fig. 19) von einer dritten EH durchschnitten werden, und ein Paar innere Ergänzungswinkel m und n zusammen weniger, als einen Flachen betragen, so müssen sich die Linien AB und CD durchschneiden, und zwar an derjenigen Seite, an welcher diese Winkel liegen, (also hier in der Figur an der rechten Seite).

Beweis. Die Linien AB und CD können nicht parallel sein, denn sonst müßten nach §. 41 die Winkel m und n zusammen einen Flachen betragen, welches gegen die Voraussetzung streitet; die Linien AB und CD können sich auch nicht an der linken Seite schneiden, denn sonst müßten die Winkel m und n nach dem vorhergehenden §. mehr, als einen Flachen betragen, welches ebenfalls gegen die Voraussetzung ist. — Da nun die Linien AB und CD nicht parallel sein und sich auch nicht an der linken Seite schneiden können, so bleibt nichts Anderes übrig, als daß sie sich rechts durchschneiden.

Bemerkung. Die folgenden Sätze enthalten Anwendungen der vorhergehenden allgemeinen Sätze über parallele und sich schneidende Linien auf besondere Fälle.

§. 47. Zusatz.

1) Zwei Linien, welche auf einer dritten senkrecht stehen, sind parallel.

2) Ist von zwei Parallelen die eine auf einer dritten senkrecht, so ist die andere auf dieser dritten ebenfalls senkrecht.

3) Aus einem Punkte außerhalb einer Linie kann auf dieselbe nur ein Loth gefällt werden.

4) Zwei Linien, welche auf zwei sich schneidenden Linien senkrecht stehen, müssen sich ebenfalls schneiden.

Beweis. 1) Wenn die Linien AB und CD (Fig. 20) auf EF senkrecht stehen, so sind die Winkel m und n rechte, also einander gleich, und folglich müssen die Linien AB und CD parallel laufen, weil ein Paar Gegenwinkel einander gleich sind.

2) Wenn AB senkrecht auf EF und CD parallel mit AB vorausgesetzt ist, so ist zunächst zu Folge der Voraussetzung Winkel m ein rechter. Der Winkel n ist aber = m, weil bei parallelen Linien die Gegenwinkel gleich sind. Demnach muß auch Winkel n ein rechter, also CD senkrecht auf EF sein.

3) Wenn die Linien CD und CE (Fig. 46), welche sich im Punkte C vereinigen, beide auf AB senkrecht ständen, so müßten sie nach Nro. 1 parallel sein. Dieses thun sie aber nicht, da sie sich schneiden. Demnach ist es nicht möglich, daß auf eine Linie aus einem außerhalb gegebenen Punkte zwei Lothe gefällt werden.

4) Wenn die Linien DE und FG (Fig. 21) auf den sich schneidenden Linien AB und BC senkrecht stehen, so müssen sie sich ebenfalls schneiden. Denn wenn wir durch den Punkt D mit BC die Parallele DH ziehen, so muß dieselbe FG durchschneiden und nach Nro. 2 auf derselben senkrecht stehen, weil nach der Voraussetzung BC auf FG senkrecht ist. Also ist Winkel DHF ein rechter; der Winkel EDH ist aber kleiner, als ein rechter, weil Winkel EDB ein rechter ist. Demnach betragen die Winkel EDH und DHF zusammen weniger, als einen Flachen, und folglich müssen sich die Linien DE und HG nach §. 46 durchschneiden.

Anm. Die Figur 21 ist für den Fall gezeichnet, daß der Winkel ABC ein stumpfer ist. Der Beweis bleibt jedoch derselbe, wenn der Winkel ABC ein spitzer ist, und die auf den Schenkeln desselben errichteten Lothe sich entweder innerhalb oder außerhalb desselben durchschneiden. — Wenn Winkel ABC ein rechter ist, so ist das Loth DE selbst mit dem Schenkel BC parallel und muß folglich auch das von diesem geschnittene Loth FG durchschneiden.

§. 48. Zusatz.

Winkel, deren Schenkel parallel laufen und vom Scheitelpunkte nach derselben Seite hin gezogen sind, sind gleich.

Beweis. Wenn AB || DE und BC || EF (Fig. 22) gegeben ist, so muß Winkel ABC = DEF sein. — Da nach §. 39 bei parallelen Linien die Gegenwinkel gleich sind, so suche ich Gegenwinkel zu bilden. Diese erhalte ich, wenn ich ein Paar nicht parallele Schenkel AB und EF verlängere, bis sie sich im Punkte G schneiden. Nun sind die entstandenen Gegenwinkel ABC und BGE einander gleich, weil BC || EG vorausgesetzt ist, und eben so die Gegenwinkel DEF und BGE einander gleich, weil DE || BG vorausgesetzt ist. Da nun Winkel ABC = BGE und BGE = DEF erwiesen ist, so muß auch ABC = DEF sein.

Uebungsfrage 1. Wie läßt sich dasselbe mit Benutzung der Wechselwinkel oder der Ergänzungswinkel beweisen?

2. Was gilt von Winkeln, deren Schenkel zwar parallel laufen, aber entweder ein Paar oder beide Paare von den Scheitelpunkten aus nach verschiedenen Seiten hin gezogen sind? —

Vierter Abschnitt.

Von den Dreiecken.

A. Von der Eintheilung der Figuren überhaupt und der Dreiecke ins Besondere.

§. 49. Erklärung.

Eine überall begrenzte Fläche heißt eine Figur. Die Figuren werden so wie die Flächen in ebene und unebene eingetheilt.

In der Planimetrie kann natürlich nur von ebenen Figuren die Rede sein.

Man theilt die ebenen Figuren wieder ein in geradlinige, krummlinige und gemischtlinige, je nachdem sie von geraden oder von krummen Linien oder von beiden zugleich eingeschlossen werden.

§. 50. Lehrsatz.

Zwei gerade Linien können keine Figur einschließen.

Beweis. Wenn die beiden geraden Linien AB und AC (Fig. 6) eine Figur einschließen sollten, so müßten sie sich, außer in A, nochmals schneiden, welches nach §. 5 unmöglich ist.

§. 51. Erklärung.

Die einfachste krummlinige Figur ist die vom Kreise eingeschlossene ebene Fläche, welche man Kreisfläche oder auch schlechthin Kreis nennt. Die einschließende krumme Linie nennt man zum Unterschiede hiervon auch Kreislinie oder Peripherie.

Beispiele von gemischtlinigen Figuren sind der Kreisabschnitt, welcher von einem Bogen und der zugehörigen Sehne begrenzt wird, und der Kreisausschnitt, welcher von zwei Radien und dem zwischenliegenden Bogen eingeschlossen ist. — Ein Kreisabschnitt, welcher von einem Durchmesser und der halben Kreislinie begrenzt ist, wird auch Halbkreis genannt.

§. 52. Erklärung.

Die geraden Linien, welche die Grenzen einer geradlinigen Figur bilden, nennt man Seiten, alle Seiten zusammen heißen Umfang oder Perimeter. Die Punkte, in welchen zwei Seiten zusammenstoßen, werden Ecken genannt, wovon die geradlinigen Figuren auch den Namen Vielecke oder Polygone führen.

Sie zerfallen nach der Anzahl ihrer Seiten (oder Ecken) in Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w.

Eine Linie, welche zwei Ecken eines Vielecks verbindet, welche nicht in derselben Seite liegen, heißt Diagonale.

§. 53. Erklärung.

Ein Dreieck, welches drei gleiche Seiten hat, heißt gleichseitig, und ein Dreieck, in welchem zwei Seiten einander gleich sind, heißt gleichschenklig *); ist in einem Dreiecke keine Seite der andern gleich, so wird dasselbe ungleichseitig genannt.

*) Die beiden gleichen Seiten AC und BC (Fig. 28) sind nehmlich Schenkel desselben Winkels ACB.

In jedem Dreieck pflegt man eine Seite als Grundlinie anzunehmen und nennt dann die beiden anderen Seiten vorzugsweise Seiten; die der Grundlinie gegenüberliegende Ecke heißt die Spitze und ein aus der Spitze auf die Grundlinie oder ihre Verlängerung gefälltes Loth die Höhe des Dreiecks.

Im gleichschenkligen Dreiecke nimmt man gewöhnlich die ungleiche Seite als Grundlinie an.

§. 54. Erklärung.

In Hinsicht der Winkel theilt man die Dreiecke ein in rechtwinklige, stumpfwinklige und spitzwinklige. — Rechtwinklig heißt ein Dreieck ABC (Fig. 24), welches einen rechten Winkel A hat; die den rechten Winkel einschließenden Seiten AB und AC heißen Catheten, und die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite BC wird Hypotenuse (ὑποτείνουσα) genannt. Stumpfwinklig heißt ein Dreieck ABC (Fig. 26), welches einen stumpfen Winkel A, und spitzwinklig ein solches Dreieck ABC (Fig. 25), welches lauter spitze Winkel hat. — Spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke führen auch den gemeinschaftlichen Namen: schiefwinklige Dreiecke.

B. Von den Seiten und Winkeln eines Dreiecks.

§. 55. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke betragen alle Winkel zusammen einen Flachen.

Beweis. Um zu zeigen, daß die drei Winkel des Dreiecks ABC (Fig. 23) zusammen einen Flachen ausmachen, ziehe ich durch eine Ecke C mit der gegenüberliegenden Seite AB eine Parallele DE. Dann ist Winkel A = a und B = b, weil DE || AB ist und bei parallelen Linien nach §. 40 die Wechselwinkel gleich sind. Die drei Winkel a, b und c machen aber zusammen den flachen Winkel DCE aus, und da ich statt a auch Winkel A, statt b Winkel B und statt c auch C setzen kann, so betragen folglich auch die drei Winkel A, B und C zusammen einen Flachen.

§. 56. Zusatz.

1) Sind von einem Dreiecke ABC (Fig. 30) zwei Winkel A und B gegeben, so ist hierdurch auch der dritte C bestimmt; dieser wird nehmlich gefunden, wenn ich die Summe der beiden gegebenen Winkel von einem Flachen subtrahire.

2) Wenn in einem Dreiecke ABC (Fig. 24) ein Winkel CAB ein rechter ist, so bleibt für die beiden andern B und C noch ein rechter übrig; und folglich muß jeder allein weniger, als einen rechten betragen, also spitz sein.

3) Ist in einem Dreiecke ABC (Fig. 26) ein Winkel A ein stumpfer, so bleibt für die beiden anderen B und C weniger, als ein rechter übrig, um so mehr muß folglich jeder derselben spitz sein.

4) Wenn zwei Linien AB und CE (Fig. 46) mit einander schiefe Winkel bilden, und man fällt aus einem Punkte C der einen CE ein Loth auf die andere AB, so muß dieses auf die Seite des spitzen Winkels AEC fallen. — Denn angenommen, es wäre möglich, daß das Loth, aus C auf AB gefällt, auf die Seite des stumpfen Winkels, z. B. auf CF fiele; — dann müßte Winkel EFC ein rechter sein; Winkel CEF ist aber als ein

stumpfer vorausgesetzt; und es enthielte folglich das Dreieck CEF einen rechten und einen stumpfen Winkel, welches nach §. 55 unmöglich ist. Demnach kann das Loth, aus C auf AB gefällt, nicht auf die Seite des stumpfen Winkels CEB, sondern allein auf die Seite des spitzen Winkels CEA fallen.

5) Wenn daher in einem Dreiecke ABC (Fig. 25) die Winkel an der Grundlinie AB beide spitz sind, so muß die Höhe CD innerhalb des Dreiecks fallen.

6) Ist aber ein Winkel an der Grundlinie, z. B. Winkel A im Dreiecke ABC (Fig. 26), ein stumpfer, so muß die Höhe CD (nach Nro. 4) außerhalb des Dreiecks fallen; und wenn endlich

7) ein Winkel an der Grundlinie, z. B. Winkel A im Dreiecke ABC (Fig. 24), ein rechter ist, so fällt die Höhe mit einer Seite AC zusammen.

§. 57. Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreiecke (ABC, Fig. 27) eine Seite (AB) verlängert, so ist der entstandene Außenwinkel (d) so groß, als die inneren gegenüberstehenden Winkel (a und c) zusammen und daher größer, als jeder derselben (a oder c) allein.

Beweis. Der Winkel d macht mit b einen Flachen aus, als Nebenwinkel, und die Winkel a, c und b machen ebenfalls einen Flachen aus, als Winkel eines Dreiecks. Wenn ich nun von beiden Flachen den Winkel b wegnehme, so bleibt das eine Mal d, das andere Mal $a + c$ übrig, folglich muß $d = a + c$ sein; denn da ich Gleiches von Gleichem weggenommen habe, so muß auch Gleiches übrig geblieben sein.

Da hiernach der Winkel d so groß ist, als a und c zusammen, so ist er folglich größer, als jeder derselben a oder c allein.

§. 58. Lehrsatz.

Im gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

Beweis 1. Wenn in dem Dreiecke ABC (Fig. 28) die Seiten AC und BC einander gleich sind, so müssen auch die Winkel A und B einander gleich sein. (Es ist kein Grund denkbar, zu Folge dessen der eine größer, als der andere sein sollte.)

*Beweis 2. Man denke sich das Dreieck ABC so umgedreht, daß die Spitze C liegen bleibt, die Seite AC auf BC und BC auf AC fällt; dann muß auch der Punkt A auf B und B auf A fallen, weil $AC = BC$ vorausgesetzt ist. Nun fällt die Seite AB auf BA, weil der Punkt A auf B und B auf A gefallen ist. Demnach ist Winkel $CAB = CBA$; denn der Scheitelpunkt A ist auf B, der Schenkel AC auf BC und der Schenkel AB ist auf BA gefallen. *)

---

*) Beim ersten Unterrichte dürfte für Anfänger, welche den Satz als von selbst einleuchtend annehmen, das unter (1) Angeführte genügen. Solchen Lesern aber, welche einen Beweis des Satzes fordern, weil sie das Bedürfniß eines solchen erkennen, ist unter (2) ein allen Anforderungen an wissenschaftliche Strenge entsprechender Beweis dargeboten. Auch der euclidische Beweis, welcher bekanntlich auf Congruenz der Dreiecke gegründet ist, läuft, wenn er von aller Umhüllung entkleidet wird, im Wesentlichen darauf hinaus, daß das gleichschenklige Dreieck in umgekehrter Lage mit sich selbst zum Decken gebracht wird.

§. 59. Lehrsatz.

Ist in einem Dreiecke eine Seite größer, als eine andere, so liegt der größeren Seite auch ein größerer Winkel gegenüber.

Beweis. Wenn in dem Dreiecke ABC (Fig. 29) die Seite BC > AC ist, so ist auch der Winkel A > B. — Den Beweis dieses Satzes führe ich auf die beiden vorhergehenden zurück, indem ich von der größeren Seite BC die kleinere AC = CD abschneide und den Endpunkt D mit A verbinde. Dann entsteht zunächst ein gleichschenkliges Dreieck ACD, in welchem nach dem vorhergehenden §. die Winkel an der Grundlinie m und n gleich sind. Zweitens ist auch noch ein Dreieck ABD entstanden, von welchem n ein Außenwinkel ist. Der Winkel n ist daher (nach §. 57) größer, als der innere gegenüberliegende Winkel B, und da der Winkel m = n ist, so ist folglich auch Winkel m > B. Der Winkel m ist aber nur ein Theil des ganzen Winkels A; folglich muß um so mehr der ganze Winkel A > B sein, w. z. e. w.

Bemerkung. Durch Umkehrung der beiden vorhergehenden Sätze entstehen die folgenden.

§. 60. Lehrsatz.

1) Sind in einem Dreiecke (ABC, Fig. 28) zwei Winkel gleich (A = B), so sind auch die gegenüberstehenden Seiten gleich (BC = AC), und das Dreieck ist folglich gleichschenklig.

2) Ist in einem Dreiecke (ABC, Fig. 30) ein Winkel größer, als ein anderer (A > B), so liegt ihm auch eine größere Seite gegenüber (BC > AC).

Beweis. 1) Die Seite BC (im Dreiecke ABC, Fig. 28) kann erstens nicht größer, als AC sein, weil sonst nach §. 59 auch Winkel A > B sein müßte, welches der Voraussetzung widerspricht; und die Seite BC kann zweitens nicht kleiner, als AC sein, weil sonst nach demselben §. Winkel A < B sein müßte, was ebenfalls gegen die Voraussetzung ist. — Demnach bleibt drittens nichts Anderes übrig, als daß BC = AC ist.

2) Die Seite BC (im Dreiecke ABC, Fig. 30) kann erstens nicht gleich AC sein, weil sonst nach §. 58 auch Winkel A = B sein müßte, welches gegen die Voraussetzung streitet, und die Seite BC kann auch nicht kleiner, als AC sein, weil sonst nach §. 59 auch Winkel A < B sein müßte, was ebenfalls gegen die Voraussetzung ist. Demnach bleibt drittens nichts Anderes übrig, als daß BC > AC ist, w. z. e. w.

Bemerkung. Beweise, wie die für die beiden Behauptungen des vorhergehenden §. (und für §. 46) geführten, nennt man indirecte Beweise zum Unterschiede von den directen Beweisen. — Bei diesen wird die zu erweisende Behauptung unmittelbar aus den vorhergehenden Sätzen abgeleitet; bei den indirecten Beweisen geschieht dieß so, daß man das Gegentheil von der zu erweisenden Behauptung annimmt und dann zeigt, daß diese Annahme zu Widersprüchen mit den schon früher als richtig erkannten Sätzen führen würde.

§. 61. Zusatz.

1) Da man im gleichseitigen Dreiecke (ABC, Fig. 31) jede Seite als Grundlinie annehmen kann, so müssen in demselben auch alle Winkel (nach §. 58) einander gleich sein; folglich ist jeder gleich dem dritten Theile eines Flachen oder = 60^0.

2) Eben so folgt aus §. 60, 1, daß ein Dreieck gleichseitig sein muß, wenn alle Winkel desselben als gleich gegeben sind.

3) Im gleichschenkligen Dreiecke (ABC, Fig. 28) sind die Winkel an der Grundlinie (AB) allemal spitz; — denn wenn einer von ihnen ein rechter oder stumpfer wäre, so müßte dasselbe auch von dem andern gelten; nach §. 55 kann aber ein Dreieck niemals zwei rechte oder zwei stumpfe Winkel enthalten.

4) Da im rechtwinkligen Dreiecke der rechte Winkel der größte ist, so muß ihm auch nach §. 60, 2 die größte Seite gegenüber liegen; folglich ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreiecke größer, als jede Cathete. Eben so ist

5) im stumpfwinkligen Dreiecke diejenige Seite am größten, welche dem stumpfen Winkel gegenüber liegt.

§. 62. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer, als die dritte.

Beweis 1. In dem Dreiecke ABC (Fig. 33) ist $AC + BC > AB$, weil nach §. 6 die gerade Linie AB die kürzeste Verbindung der beiden Punkte A und B ist und folglich kürzer sein muß, als AC und BC zusammen.

*Beweis 2. Man verlängere AC um $CD = BC$ (Fig. 32) und ziehe BD; dann ist Winkel $ABD > CBD$ und Winkel $CBD = CDB$, weil $BC = CD$ ist, folglich auch Winkel $ABD > ADB$, daher im Dreiecke ABD nach §. 60, 2 Seite $AD > AB$, oder da $AD = AC + CD = AC + BC$ ist, $AC + BC > AB$.

§. 63. Zusatz.

Der Unterschied zweier Seiten eines Dreiecks ist kleiner, als die dritte Seite.

Beweis 1. Wenn ich von der Seite AB die Seite $BC = BD$ abschneide, so ist AD der Unterschied dieser beiden Seiten, und es soll nun erwiesen werden, daß $AD < AC$ ist. — Nach dem vorhergehenden §. ist

$$AC + BC > AD + BD,$$

folglich, wenn ich auf beiden Seiten das gleiche BC und BD weglasse,

$$AC > AD.$$

*Beweis 2. Man schneide BC von AB vom Punkte B aus $= BD$ ab und verbinde C mit D; dann ist zu erweisen, daß $AD < AC$ ist. Da das entstandene Dreieck BCD gleichschenklig ist, so ist (nach §. 61, 3) Winkel BDC ein spitzer, folglich sein Nebenwinkel ADC stumpf und daher im Dreiecke ADC die Seite $AC > AD$.

§. 64. Zusatz.

Wenn über derselben Grundlinie (AB) zwei Dreiecke (ABC und ADB, Fig. 34 und 35) errichtet sind und

1) ein Paar Seiten dieser Dreiecke sich durchschneiden, so ist die Summe der sich schneidenden Seiten größer, als die Summe der sich nicht schneidenden ($AD + BC > AC + BD$, Fig. 34); wenn aber

2) die Seiten des einen die Seiten des andern einschließen, so ist die Summe der einschließenden Seiten größer, als die Summe der eingeschlossenen ($AC + BC > AD + BD$, Fig. 35).

Beweis. 1) Um zu beweisen, daß die sich schneidenden Seiten AD

und BC (Fig. 34) zusammen größer sind, als die sich nicht schneidenden AC und BD, nehme ich die beiden kleinen Dreiecke ACE und BDE zu Hilfe und wende auf dieselben den Satz an: In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer, als die dritte. Folglich ist in dem △ ACE:

$$AE + CE > AC$$

und in dem △ BDE: $BE + DE > BD$.

Jetzt addire ich das Größere zum Größeren und das Kleinere zum Kleineren, dann erhalte ich $AE + CE + BE + DE > AC + BD$.

Statt $AE + DE$ kann ich aber kürzer AD und statt $CE + BE$ kürzer BC setzen; so ergiebt sich $AD + BC > AC + BD$, w. z. e. w.

2) Um zu zeigen, daß die einschließenden Seiten AC und BC (Fig. 35) zusammen größer sind, als die eingeschlossenen AD und BD, verlängere ich eine der eingeschlossenen Seiten, z. B. AD über den Punkt D, bis sie die Seite BC im Punkte E trifft. Hierdurch sind zwei kleinere Dreiecke ACE und BDE entstanden, auf welche ich wieder den Satz anwende: In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer, als die dritte. Also ist hier

in dem △ ACE: $AC + CE > AD + DE$

und in dem △ BDE: $BE + DE > BD$.

Nun addire ich das Größere zum Größeren und das Kleinere zum Kleineren, so ergiebt sich $AC + CE + BE + DE > AD + DE + BD$.

Jetzt kann ich aber auf beiden Seiten das Gleiche DE weglassen und statt $CE + BE$ kürzer BC setzen; dann erhalte ich

$$AC + BC > AD + BD.$$

*§. 65. Lehrsatz.

Wenn zwei Punkte A und B (Fig. 36) durch eine gerade Linie AB und durch eine gebrochene Linie AEDCB verbunden sind, so ist die gebrochene Linie größer, als die gerade.

Beweis. Denn wenn wir den einen Endpunkt A mit den Eckpunkten der gebrochenen Linie D und C verbinden, so ist in den entstandenen Dreiecken

$$AE + DE > AD$$

$$AD + CD > AC$$

$$AC + BC > AB,$$

folglich wenn wir addiren:

$$AE + DE + AD + CD + AC + BC > AD + AC + AB,$$

also wenn wir auf beiden Seiten das gleiche AD und AC weglassen:

$$AE + DE + CD + BC > AB.$$

*§. 66. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden §. folgt weiter: Die gerade Linie, welche zwei Punkte verbindet, ist kürzer, als jede zwischen denselben gezogene krumme Linie, (indem nehmlich die krumme Linie sich mit der geraden überhaupt nicht anders vergleichen läßt, als wenn man sich dieselbe aus unendlich vielen unendlich kleinen geraden Stücken bestehend denkt.)

Anm. Wer auf diese Vorstellung nicht eingehen kann oder will, der wird überhaupt auf die Vergleichung der geraden und krummen Linie verzichten müssen. Alle anderen Wege der Vergleichung sind nur Umkleidungen des hier unumwunden Ausgesprochenen.

*§. 67. Lehrsatz.

Wenn zwei Punkte A und B (Fig. 37) durch zwei gebrochene Linien AFEDCB und AKHGB so verbunden sind, daß in den Viel-

ecken, welche die gebrochenen Linien mit der A und B verbindenden geraden Linie bilden, sämmtliche Winkel hohle sind, so ist die äußere gebrochene Linie AFEDCB größer, als die innere eingeschlossene AKHGB.

Beweis. Denn wenn wir die Seiten des inneren Vielecks AK, KH und HG so weit verlängern, bis sie die Seiten des äußeren Vielecks in den Punkten L, M und N durchschneiden, so ist nach §. 62 und 65

$$AF + FL > AK + KL$$
$$KL + EL + ED + DM > HK + HM$$
$$HM + CM + CN > GH + GN$$
$$GN + BN > BG.$$

Wenn wir nun das Größere und das Kleinere addiren, auf beiden Seiten das Gleiche KL, HM und GN weglassen und FL + EL durch EF, DM + CM durch CD und CN + BN durch BC ersetzen, so erhalten wir

$$AF + EF + DE + CD + BC > AK + HK + GH + BG.$$

Anm. Der vorhergehende Satz kann keine Anwendung auf die in Fig. 38, a dargestellten gebrochenen Linien finden. Denn da hier das eingeschlossene Vieleck auch erhabene Winkel enthält, so kann die eingeschlossene gebrochene Linie auch größer, als die einschließende sein.

*§. 68. Zusatz.

Wenn die Endpunkte einer geraden Linie durch zwei gebrochene oder krumme Linien (ACB und ADB, Fig. 38, b), welche durchweg ihre hohlen Seiten gegen die gerade wenden, verbunden sind, so ist die einschließende gebrochene oder krumme Linie (ACB) größer, als die eingeschlossene (ADB).

Anm. Auf diesen Satz gründet sich wesentlich die Ausmessung des Kreises.

C. Von der Congruenz der Dreiecke.

§. 69. Erklärung.

Zwei Figuren heißen congruent (≅), wenn sie sich so aufeinander legen lassen, daß ihre Grenzen sich decken. *)

§. 70. Lehrsatz. (Erster Congruenzfall.)

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, und es sind dann auch die übrigen Seiten und Winkel in beiden Dreiecken gleich groß.

Beweis. Es sei also in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 39) Seite AB = DE, AC = DF und Winkel A = D gegeben, und es soll bewiesen werden, daß △ ABC ≅ DEF ist, (das heißt nach §. 69, daß sie sich so auf einander legen lassen, daß ihre Grenzen sich decken). Ich lege daher △ ABC so auf DEF, daß der Punkt A auf D und Seite AB in die Richtung von DE fällt, dann muß 1) auch der Punkt B auf E fallen, weil nach der Voraussetzung Seite AB = DE ist; 2) muß auch die Seite AC in die Richtung von DF fallen, weil Winkel A = D vorausgesetzt ist; 3) muß

*) Man gelangt zur Auffindung der folgenden Congruenzsätze, wenn man sich denkt, man habe von einem Dreiecke alle Seiten und Winkel gemessen, und nun versucht, das Dreieck mit Hülfe dieser Stücke abzuzeichnen. Man findet dann leicht, daß man für diesen Zweck nicht aller sechs Stücke bedarf, sondern mit dreien derselben ausreicht.

der Punkt C auf F fallen, weil Seite AC = DF vorausgesetzt ist, und endlich 4) fällt die Seite BC auf EF, weil der Punkt B auf E und C auf F gefallen ist. Demnach ist △ ABC ≌ DEF. — Ferner ist auch Seite BC = EF, weil ihre Endpunkte, und Winkel B = E und C = F, weil ihre Scheitel und Schenkel zusammengefallen sind, w. z. e. w.

Bemerkung. Wir haben im Vorhergehenden das △ ABC so auf das △ DEF gelegt, daß der Punkt A auf D fiel. Hierdurch war aber die Lage des △ ABC noch keineswegs fest bestimmt; vielmehr konnte man jetzt noch das △ ABC willkührlich um den Punkt D drehen. Erst nachdem wir noch die Bedingung hinzugefügt hatten, daß die Seite AB in die Richtung von DE fallen sollte, lag das △ ABC wirklich fest, und wir waren nun nicht mehr im Stande, die übrigen Stücke nach Willkühr zu legen; vielmehr blieb uns jetzt weiter nichts übrig, als zuzusehen, wo die übrigen Ecken und Seiten des △ ABC nach den Bedingungen der Voraussetzung hinfielen. —

So oft überhaupt zwei Figuren geometrisch auf einander gelegt werden, gilt die Regel, daß man einen Punkt und eine Seite zusammenlegt und dann zusieht, wo die übrigen Stücke hinfallen. —

§. 71. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind ferner congruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, und es sind dann auch die übrigen Seiten und Winkel in beiden Dreiecken gleich groß.

Beweis. Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 39) Seite AB = DE, Winkel A = D und Winkel B = E. Um nun zu zeigen, daß die beiden Dreiecke einander congruent sind, lege ich, so wie im vorhergehenden §., das Dreieck ABC so auf DEF, daß der Punkt A auf D und Seite AB in die Richtung von DE fällt, dann muß 1) auch der Punkt B auf E fallen, weil AB = DE vorausgesetzt ist; 2) muß Seite AC in die Richtung von DF fallen, weil Winkel A = D gegeben ist; 3) muß Seite BC in die Richtung von EF fallen, weil Winkel B = E gegeben ist, und endlich 4) muß auch der Punkt C auf F fallen, weil die sich in C schneidenden Linien AC und BC mit den sich in F schneidenden Linien DF und EF zusammen gefallen sind. Demnach ist △ ABC ≌ DEF. — Ferner ist auch Seite AC = DF und BC = EF, weil ihre Endpunkte, und Winkel C = F, weil Scheitel und Schenkel zusammen gefallen sind.

§. 72. Zusatz.

Zwei Dreiecke (ABC und DEF, Fig. 39) sind auch dann congruent, wenn sie in einer Seite (AB = DE), einem anliegenden Winkel (A = D) und dem gegenüberliegenden Winkel (C = F) übereinstimmen.

Den Beweis dieses Satzes führe ich auf den vorhergehenden zurück mit Hilfe des Satzes (§. 56, 1): Sind in einem Dreiecke zwei Winkel gegeben, so ist hierdurch auch der dritte bestimmt. Da nehmlich Winkel A = D und C = F gegeben ist, so muß auch der dritte Winkel B = E sein. Nun sind die Dreiecke nach dem letzten Lehrsatze congruent, weil sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, nehmlich

$$\left.\begin{array}{l}\text{Seite } AB = DE \\ \text{Winkel } A = D\end{array}\right\} \text{vorausgesetzt,}$$

$$\text{Winkel } B = E \text{ erwiesen,}$$

folglich $\triangle ABC \cong DEF$, w. z. e. w.

§. 73. Zusatz.

Wenn man die beiden letzten Sätze zusammenfaßt, so ergiebt sich der folgende Satz, als

Zweiter Congruenzfall.

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln oder in einer Seite einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Bemerkung. Wie man sehr leicht sieht, müssen zwei Dreiecke auch dann congruent sein, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen. Versucht man aber unter dieser Voraussetzung die beiden Dreiecke ABC und DEF (Fig. 39) auf einander zu legen, nehmlich Punkt A auf D und Seite AB auf DE, so muß zwar allerdings auch Punkt B auf E fallen, weil $AB = DE$ gegeben ist; aber über die Lage der Linien AC und BC läßt sich nichts Bestimmtes sagen, weil in der Voraussetzung über die Größe der Winkel A und D und der Winkel B und E nichts festgestellt ist. Andererseits begreift man jedoch sehr bald, daß z. B. die Winkel A und D nicht ungleich sein können, weil sonst die Seiten BC und EF einander nicht gleich sein könnten. Diese Ueberlegung führt auf den folgenden Lehrsatz, auf welchen sich der Beweis des dritten Congruenzfalles stützt.

§. 74. Lehrsatz.

Sind in zwei Dreiecken je zwei Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so liegt dem größeren Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

Beweis. Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 40) Seite $AB = DE$, Seite $AC = DF$, aber der Winkel $A > D$, so ist zu beweisen, daß auch Seite $BC > EF$ ist. Um diese beiden Linien mit einander vergleichen zu können, lege ich das Dreieck DEF so auf ABC, daß der Punkt D auf A und die Seite DE auf AB fällt; dann fällt auch der Punkt E auf B, weil $AB = DE$ vorausgesetzt ist; die Seite DF fällt aber nicht auf AC, sondern zwischen AB und AC, angenommen auf AG, weil Winkel $D < A$ vorausgesetzt ist. — Die Seite EF kann dreifach fallen; dieses hängt von der Größe des Winkels E ab; dieser kann nehmlich größer, kleiner oder eben so groß, als der Winkel B sein. Wenn

1) der Winkel $E > B$ ist (Fig. 40, a), so fällt die Seite EF über BC hinaus, angenommen auf BG. Nun sind zwei Dreiecke ABC und ABG entstanden, welche die Grundlinie AB gemeinschaftlich haben, und in denen sich zwei Seiten AG und BC durchschneiden. Nach §. 64 ist die Summe der sich schneidenden Seiten größer, als die Summe der sich nicht schneidenden Seiten, also $AG + BC > AC + BG$.

Nach der Construction ist aber $AG = DF$, und DF ist $= AC$ vorausgesetzt; folglich ist auch $AG = AC$. Ich kann daher auf beiden Seiten das gleiche AG und AC weglassen, und es bleibt übrig

$$BC > BG,$$

oder da ich statt BG auch EF setzen kann:

BC > EF, w. z. e. w.

2) Wenn der Winkel E < B ist (Fig. 40, b), so fällt die Seite EF zwischen AB und BC, angenommen auf BG. Dann entstehen zwei Dreiecke ABC und ABG, welche die Grundlinie AB gemeinschaftlich haben, und bei denen zwei Seiten des einen die beiden Seiten des andern einschließen. Nach §. 64 ist die Summe der einschließenden Seiten größer, als die Summe der eingeschlossenen, also AC + BC > AG + BG
und folglich, wenn ich wieder auf beiden Seiten das gleiche AC und AG weglasse, BC > BG,
also auch BC > EF.

3) Endlich kann der Winkel E auch = B sein (Fig. 40, c); dann fällt die Seite EF auf BC, und da die Linie DF zwischen AB und AC, auf AG, zu liegen kommt, so fällt auch der Punkt F zwischen B und C, auf G; folglich ist EF < BC.

§. 75. Lehrsatz. (Dritter Congruenzfall.)

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Beweis. Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 39) Seite AB = DE, AC = DF und BC = EF, und es soll bewiesen werden, daß Dreieck ABC ≌ DEF ist. — Ich brauche hier nur ein Paar Winkel, z. B. die Winkel A und D als gleich zu erweisen. Der Winkel A kann nicht > D sein, weil sonst nach dem vorhergehenden §. auch Seite BC > EF sein müßte, welches der Voraussetzung widerspricht; und da eben so wenig Winkel A < D sein kann, so muß folglich Winkel A = D sein. Nun sind die beiden Dreiecke ABC und DEF congruent, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, nehmlich

Seite AB = DE } vorausgesetzt
Seite AC = DF }
und Winkel A = D erwiesen,

folglich △ ABC ≌ DEF nach §. 70, w. z. b. w.

Bemerkung. Durch Umkehrung von §. 74 geht der folgende §. hervor.

§. 76. Lehrsatz.

Sind in zwei Dreiecken je zwei Seiten gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so liegt der größeren Seite auch ein größerer Winkel gegenüber.

Beweis. Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 40) Seite AB = DE, AC = DF, aber BC > EF, so muß auch Winkel A > D sein. — Die Richtigkeit dieser Behauptung läßt sich leicht indirekt darthun. Der Winkel A kann nehmlich nicht = D sein, weil sonst die beiden Dreiecke in zwei Seiten (AB = DE und AC = DF nach der Voraussetzung) und dem eingeschlossenen Winkel (A = D nach der Annahme) übereinstimmten und folglich nach §. 70 congruent wären, also auch Seite BC = EF sein müßte, welches der Voraussetzung widerspricht. — Der Winkel A kann auch nicht < D sein; denn dann müßte nach §. 74 Seite BC < EF sein, welches ebenfalls gegen die Voraussetzung streitet. — Da nun Winkel A weder =, noch < D sein kann, so bleibt nichts Anderes übrig, als daß Winkel A > D ist, w. z. b. w.

Bemerkung. Wir haben in den vorhergehenden §§. gesehen, daß zwei Dreiecke congruent sind, wenn sie übereinstimmen:

in drei Seiten,

in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,

in einer Seite und den beiden anliegenden oder einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel.

Die Frage liegt nun sehr nahe, ob zwei Dreiecke nicht auch dann nothwendig congruent sind, wenn sie in zwei Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. Daß dieses nicht in allen Fällen, sondern nur unter gewissen Bedingungen nothwendig stattfindet, zeigt der folgende Satz.

*§. 77. Lehrsatz.

1) Zwei Dreiecke können in zwei Seiten und dem der einen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, ohne deshalb congruent zu sein.

Beweis. Denn wenn man die Grundlinie AG eines gleichschenkligen Dreiecks ACG (Fig. 41) um ein beliebiges Stück BG verlängert und den Punkt B mit C verbindet, so ist in den entstandenen Dreiecken ABC und GBC die Seite BC und der Winkel B gemeinschaftlich und die diesem Winkel gegenüberliegende Seite AC = CG; die Dreiecke ABC und GBC sind aber nichts weniger, als congruent.

2) Die der gemeinschaftlichen Seite BC dieser Dreiecke gegenüberliegenden Winkel CAB und CGB ergänzen sich zu einem Flachen. — Denn da in dem gleichschenkligen Dreiecke ACG Winkel CAG = CGA und CGA + CGB = π ist, so ist auch CAG + CGB = π.

3) Ueberhaupt ergänzen sich in zwei nicht congruenten Dreiecken, welche in zwei Seiten und dem der einen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, die der andern Seite gegenüberliegenden Winkel allemal zu einem Flachen.

Beweis. Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 41) Seite AC = DF, Seite BC = EF und Winkel B = E, aber da die Dreiecke als nicht congruent vorausgesetzt sind, Seite AB > DE; dann läßt sich zeigen, daß Winkel A + D = π ist. Denn wenn wir von der größeren Seite AB die kleinere DE = BG abschneiden und CG ziehen, so ist das entstandene Dreieck GBC $\cong$ DEF aus Gleichheit zweier Seiten (BC = EF vorausgesetzt und BG = DE nach der Constr.) und des eingeschlossenen Winkels (B = E vorausgesetzt); folglich ist auch Seite CG = DF = AC und W. EDF = BGC. — Nach Nro. 2 ist aber Winkel BAC + BGC = π; also ist auch Winkel BAC + EDF = π.

4) Wenn daher zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der einen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, so sind überhaupt zwei Fälle möglich; entweder die der andern Seite gegenüberliegenden Winkel sind gleich, — und die Dreiecke sind folglich congruent, — oder diese Winkel ergänzen sich zu einem Flachen.

Anm. Wenn zwei Dreiecke ABC und DEF (Fig. 44) in zwei Seiten und dem der einen gegenüberliegenden Winkel (AC = DF, BC = EF und Winkel B = E) übereinstimmen, so können auch die der andern Seite gegenüberliegenden Winkel (A und D) sowohl einander gleich sein, als auch sich zu einem Flachen ergänzen. Dies ist der Fall, wenn diese beiden Winkel rechte sind. Die Dreiecke ABC und DEF sind dann natürlich (nach §. 73) congruent.

*§. 78. Zusatz.

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und

dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Beweis. Es sei in dem Dreieck ABC und DEF (Fig. 39) Seite AC = DF, Seite BC = EF und Winkel A = D und zugleich vorausgesetzt, daß die dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite $BC > AC$ und eben so $EF > DF$ ist. Dann sind die den andern gegebenen Seiten gegenüberliegenden Winkel B und E beide nothwendig spitz, weil, wenn einer von ihnen, z. B. B, ein rechter oder stumpfer Winkel wäre, $AC > BC$ sein müßte, was gegen die Voraussetzung streitet. Da hiernach Winkel B und eben so Winkel E spitz sein muß, zwei spitze Winkel aber zusammen keinen Flachen ausmachen können, so sind die Dreiecke ABC und DEF nach §. 77, 4 congruent.

Bemerkung. Die vorhergehenden Sätze gelten von allen Dreiecken, die nun folgenden Sätze betreffen besondere Arten von Dreiecken.

D. Von den rechtwinkligen Dreiecken ins Besondere.

Bemerkung. Zwei rechtwinklige Dreiecke (ABC und DEF, Fig. 44) sind schon dann congruent, wenn sie in den beiden Catheten (AB = DE und AC = DF) übereinstimmen, da auch die eingeschlossenen Winkel (A und D) als rechte einander gleich sind. Das rechtwinklige Dreieck wird also durch die Größe seiner beiden Catheten vollständig bestimmt. — Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke CDE (Fig. 46) eine Cathete DE wachsen, die andere CD ungeändert läßt, so sieht man leicht, daß auch die Hypotenuse zunimmt, und daß dieses um so mehr der Fall sein wird, wenn man beide Catheten zugleich wachsen läßt. — Diese Ueberlegungen führen zu den nächsten Sätzen.

§. 79. Lehrsatz.

Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken ein Paar Catheten gleich sind, die zweite Cathete des einen Dreiecks aber größer ist, als die zweite Cathete des andern Dreiecks, so ist auch die Hypotenuse im ersten Dreiecke größer, als im zweiten.

Beweis. Wenn in den rechtwinkligen Dreiecken CAB und FDE (Fig. 42) die Cathete AC = DF, aber die Cathete $AB > DE$ ist, so ist auch die Hypotenuse $BC > EF$. — Um dieses zu erweisen, schneide ich von der größeren Cathete AB die kleinere DE = AG ab und ziehe CG, dann ist das entstandene Dreieck AGC dem Dreiecke DEF congruent, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, nehmlich

AC = DF nach der Voraussetzung,
AG = DE nach der Construction,
und Winkel CAG = FDE, als rechte,

folglich $\triangle AGC \cong DEF$
und CG = EF.

Ich brauche daher nur noch zu erweisen, daß $BC > CG$ ist. Diese beiden Linien liegen in dem Dreiecke BCG zusammen. In diesem ist der Winkel CGB ein stumpfer, weil sein Nebenwinkel CGA ein spitzer ist, und dieser ist ein spitzer, weil er in dem rechtwinkligen Dreiecke CAG an der Hypotenuse CG liegt. Da nun der Winkel CGB ein stumpfer ist, so ist die ihm gegenüberliegende Seite BC die größte in dem Dreiecke BCG und also größer, als CG. Die Linie CG ist aber gleich EF erwiesen; folglich ist auch CB größer, als EF.

§. 80. Lehrsatz.

Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke beide Catheten größer sind, als in einem andern, so ist auch die Hypotenuse im ersten Dreiecke größer, als im zweiten.

Beweis. Wenn in den rechtwinkligen Dreiecken CAB und FDE (Fig. 43) Cathete AC > DF und Cathete AB > DE ist, so muß auch die Hypotenuse BC > EF sein. — Die Richtigkeit dieser Behauptung läßt sich leicht mit Hilfe des vorhergehenden Satzes darthun. Wenn ich nehmlich von der Cathete AB vom Punkte A aus ein Stück AG = DE abschneide und den Endpunkt G mit C verbinde, so entsteht ein drittes rechtwinkliges Dreieck CAG, welches ich mit den beiden gegebenen Dreiecken, da es mit jedem in einer Cathete übereinstimmt, nach dem vorhergehenden §. vergleichen kann. Zuerst vergleiche ich das Dreieck CAG mit CAB; die Cathete AC ist beiden gemeinschaftlich, aber die Cathete AB ist > AG; folglich ist nach dem vorhergehenden §. auch die Hypotenuse BC > CG. — Zweitens vergleiche ich das Dreieck CAG mit FDE; die Cathete AG ist = DE gemacht, aber die Cathete AC ist > DF vorausgesetzt; folglich ist wieder nach dem vorhergehenden §. die Hypotenuse CG > EF. — Da nun Hypotenuse BC > CG und CG > EF ist, so ist folglich auch BC > EF, w. z. b. w.

§. 81. Lehrsatz.

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie in der Hypotenuse und einer Cathete übereinstimmen.

*Beweis 1. Dieser Satz ist ein besonderer Fall von §. 78.

Beweis 2. Es sei in den rechtwinkligen Dreiecken ABC und DEF (Fig. 44) Hypotenuse BC = EF und Cathete AB = DE, so werden die beiden Dreiecke gewiß congruent sein, wenn ich erweisen kann, daß auch die Cathete AC = DF ist. Dieses folgt aber leicht indirekt mit Hülfe von §. 79. Wollte ich nehmlich annehmen, daß die Cathete AC > oder < DF wäre, so müßte nach dem angeführten §. auch die Hypotenuse BC > oder < EF sein, welches der Voraussetzung widerspricht. Demnach muß AC = DF sein. Nun sind die beiden Dreiecke ABC und DEF congruent, weil sie in den drei Seiten übereinstimmen, nehmlich:

$$\left.\begin{array}{l} AB = DE \\ BC = EF \end{array}\right\} \text{vorausgesetzt,}$$
$$AC = DF \text{ erwiesen,}$$

folglich $\triangle\ ABC \cong DEF$ nach §. 75.

§. 82. Lehrsatz.

Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken ABC und DEF (Fig. 45) die Hypotenusen BC und EF gleich sind, aber die eine Cathete AB des einen Dreiecks größer ist, als eine Cathete DE des andern Dreiecks, so ist dagegen die zweite Cathete AC des ersten Dreiecks kleiner, als die zweite Cathete DF des andern Dreiecks.

Beweis. Auch diesen Beweis führe ich indirect. Die Cathete AC kann nehmlich nicht = DF sein; denn da die Cathete AB > DE vorausgesetzt ist, so müßte nach §. 79 auch die Hypotenuse BC > EF sein, welches der Voraussetzung widerspricht; und die Cathete AC kann eben so wenig > DF sein, denn es müßte dann, (da AB > DE vorausgesetzt ist), nach §. 80 die Hypotenuse BC um so mehr > EF sein. Da nun AC nicht = und auch

nicht $>$ DF sein kann, so bleibt nichts Anderes übrig, als daß AC $<$ DF ist, w. z. e. w.

Uebungsfrage. Wie zeichnet man zwei rechtwinklige Dreiecke, in denen die Hypotenusen gleich, die Catheten aber ungleich sind?

Anm. Um alle möglichen Beziehungen, welche zwischen den Seiten zweier rechtwinkligen Dreiecke, in ähnlicher Art, wie in den vorhergehenden §§., aufgestellt werden können, zu erschöpfen, führen wir noch folgende minder wichtige und leicht zu erweisende Sätze an:

1) Sind in zwei rechtwinkligen Dreiecken ein Paar Catheten gleich, und ist die Hypotenuse in dem einen größer, als im andern, so muß auch die zweite Cathete im ersten größer, als im andern Dreiecke sein.

2) Ist in einem rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse größer, aber eine Cathete kleiner, als in einem andern, so ist die zweite Cathete im ersten Dreiecke größer, als im andern.

§. 83. Zusatz.

Wenn nach einer Linie AB (Fig. 46) von einem außerhalb gegebenen Punkte C mehrere Linien CD, CE, CF... gezogen werden, so ist das Loth CD unter allen am kleinsten und heißt daher der Abstand des Punktes von der Linie, und die Linien werden um so größer, je mehr sie sich von dem Lothe entfernen.

Beweis. Die Linie CE ist größer, als das Loth CD, weil das Dreieck CDE rechtwinklig und nach §. 61 in einem rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse größer, als jede Cathete ist. Die Linie CF ist aber noch $>$ CE; denn in den rechtwinkligen Dreiecken CDE und CDF ist

	Cathete CD = CD,
aber	Cathete DF $>$ DE,
folglich	Hypotenuse CF $>$ CE nach §. 79.

§. 84. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden §. ergeben sich folgende (für die am Schlusse dieses Abschnittes zu behandelnden Aufgaben nützliche) Sätze:

1) Wenn man um einen Punkt C, welcher außerhalb einer Linie AB gegeben ist, mit einem Radius, welcher gleich dem Lothe CD ist, einen Kreis beschreibt, so trifft dieser Kreis die Linie AB in einem Punkte, nehmlich im Fußpunkte D des Lothes CD; — wenn aber

2) der Radius größer, als das Loth CD ist, so trifft der Kreis die Linie AB in zwei Punkten, welche zu beiden Seiten von D liegen; und wenn

3) der Radius kleiner, als CD ist, so trifft der Kreis mit der Linie AB in keinem Punkte zusammen.

E. Von den gleichschenkligen Dreiecken.

§. 85. Lehrsatz.

1) Wenn man in einem gleichschenkligen Dreiecke die Grundlinie halbirt und den Halbirungspunkt mit der Spitze des Dreiecks durch eine gerade Linie verbindet, so halbirt dieselbe auch den Winkel an der Spitze und steht auf der Grundlinie senkrecht.

2) Wenn man in einem gleichschenkligen Dreiecke den Winkel an der Spitze durch eine Linie halbirt, so halbirt diese Linie auch die Grundlinie und steht auf derselben senkrecht.

3) Wenn man in einem gleichschenkligen Dreiecke ein Loth aus der Spitze auf die Grundlinie fällt, so halbirt dasselbe die Grundlinie und den Winkel an der Spitze.

4) Wenn man in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks ein Loth aufrichtet, so geht dasselbe durch die Spitze.

5) Ein Dreieck, dessen Grundlinie durch die Höhe halbirt wird, ist gleichschenklig.

Beweis. 1) Das gegebene gleichschenklige Dreieck sei ABC (Fig. 47) mit der Grundlinie AB; wenn nun AD = DB vorausgesetzt wird, so stimmen die beiden Dreiecke ADC und BDC in den drei Seiten überein und sind daher nach §. 75 congruent; folglich ist auch Winkel ACD = DCB und Winkel ADC = BDC, also CD $\perp$ AB.

2) Wenn Winkel ACD = BCD vorausgesetzt wird, so stimmen die Dreiecke ADC und BDC in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein (AC = BC, CD = CD, Winkel ACD = BCD vorausgesetzt) und sind folglich nach §. 70 congruent. Daher ist auch Seite AD = DB und Winkel ADC = BDC, also CD $\perp$ AB, w. z. e. w.

3) Wenn CD $\perp$ AB vorausgesetzt ist, so sind die Dreiecke ADC und BDC rechtwinklig; und da sie in der Hypotenuse (AC = BC vorausgesetzt) und in einer Cathete (CD gemeinschaftlich) übereinstimmen, so sind sie nach §. 81 congruent; folglich ist auch Cathete AD = BD und Winkel ACD = BCD.

4) Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugen wir uns auf indirectem Wege. — Angenommen es wäre möglich, in dem Halbirungspunkte D der Grundlinie AB ein Loth DE zu errichten, welches nicht durch die Spitze C geht, so verbinde ich C mit D. Diese Linie CD ist nach Nro. 1 senkrecht auf AB. Folglich kann DE kein Loth sein, sondern das im Punkte D auf AB errichtete Loth muß nothwendig durch die Spitze C gehen.

5) Wenn in einem Dreiecke ABC die Höhe CD die Grundlinie AB halbirt, so muß das Dreieck gleichschenklig sein. — Denn die beiden Dreiecke ADC und BDC sind congruent, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (CD = CD, AD = BD vorausgesetzt, Winkel ADC = BDC = 90^0) übereinstimmen; folglich ist auch Seite AC = BC.

Bemerkung. Aus der vorletzten Nummer des eben erwiesenen Satzes folgt, daß, wenn über derselben Grundlinie mehrere gleichschenklige Dreiecke errichtet sind, ihre Spitzen sämmtlich in einer geraden Linie liegen, nehmlich in dem auf der Grundlinie in ihrer Mitte errichteten Lothe. Die Dreiecke können an derselben Seite oder an entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Grundlinie liegen. Durch Umkehrung der eben ausgesprochenen Behauptung geht der folgende Satz hervor.

§. 86. Lehrsatz.

Wenn zwei gleichschenklige Dreiecke ABC und ABD (Fig. 48) eine gemeinschaftliche Grundlinie AB haben, und man verbindet ihre Spitzen C und D durch eine gerade Linie, so gilt dreierlei:

1) Die Verbindungslinie CD halbirt die Winkel an der Spitze C und D;

2) sie halbirt auch die Grundlinie AB, und

3) sie ist auf derselben senkrecht.

Beweis. Zunächst lassen sich die Dreiecke ACD und BCD als congruent erweisen, weil sie in den drei Stücken übereinstimmen, nehmlich

$$\left.\begin{array}{l} AC = BC \\ AD = BD \end{array}\right\} \text{vorausgesetzt,}$$

$$\underline{CD = CD,}$$

folglich $\triangle ACD \cong BCD$, und daher auch

1) Winkel ACD = BCD und ADC = BDC.

Da nun die Linie CE den Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ACB halbirt, so muß sie nach Nro. 2 des vorhergehenden §. auch 2) die Grundlinie AB im Punkte E halbiren und 3) auf derselben senkrecht stehen.

Anm. Der Beweis ändert sich nur unbedeutend ab, wenn die beiden gleichschenkligen Dreiecke an derselben Seite der gemeinschaftlichen Grundlinie liegen.

F. Aufgaben.

Bemerkung. Alle Sätze, welche im Vorhergehenden enthalten sind, zerfallen in Erklärungen, Grundsätze, Lehrsätze und Zusätze.

Eine Erklärung ist die Angabe der wesentlichen Merkmale eines Begriffs. Ein Grundsatz ist ein Satz, dessen Richtigkeit an sich klar ist, der also weder eines Beweises bedarf, noch eines solchen fähig ist. Ein Lehrsatz ist ein Satz, dessen Richtigkeit sich durch einen Beweis außer Zweifel setzen läßt. — Einen Satz beweisen heißt aber, (wie schon oben §. 25 bemerkt), ihn auf frühere Sätze zurückführen. — Zusätze sind leichtere Lehrsätze, für welche der Beweis eigentlich schon in den vorangehenden Lehrsätzen enthalten ist. — Da die ersten Lehrsätze nicht auf noch frühere Lehrsätze zurückgeführt werden können, so müssen denselben ein oder einige Grundsätze vorangehen, welche die Grundlage für alle weiterhin zu erweisenden Sätze bilden. Wir können daher auch sagen: Einen Satz erweisen heißt, ihn auf die Grundsätze zurückführen, was entweder unmittelbar geschehen kann, oder mittelbar mit Benutzung schon erwiesener Sätze.

In den nächsten §§. werden wir eine neue Art Sätze, nehmlich Aufgaben, kennen lernen. So wie jeder Lehrsatz eines Beweises bedarf, welcher die Richtigkeit des Satzes zeigt, so bedarf die Aufgabe zunächst einer Auflösung, welche aussagt, wie das in der Aufgabe Geforderte zu erreichen ist; und die Auflösung bedarf dann noch eines Beweises, welcher darthut, daß die Auflösung wirklich das leistet, was in der Aufgabe gefordert wird.

Zwei Aufgaben werden der Auflösung aller anderen Aufgaben zu Grunde gelegt und heißen Postulate, nehmlich

1) Zwischen zwei Punkten eine gerade Linie zu ziehen und eine gerade Linie willkührlich zu verlängern.

2) Um einen gegebenen Punkt in einer Ebene mit einem gegebenen Radius einen Kreis zu beschreiben.

Die Auflösung dieser beiden Aufgaben ist an sich klar; d. h. es ist immer möglich, zwischen zwei gegebenen Punkten eine gerade Linie zu ziehen oder eine gegebene gerade Linie zu verlängern, und mit einem jeden Radius läßt sich um einen Punkt in der Ebene ein Kreis beschreiben. — Alle anderen geometrischen Aufgaben werden auf diese beiden zurückgeführt, welches entweder unmittelbar geschehen kann oder mittelbar mit Benutzung solcher

Aufgaben, welche bereits durch die Postulate gelöst sind. Eine Aufgabe geometrisch lösen, heißt sie auf die Postulate zurückführen. Die folgenden Beispiele werden das eben Gesagte erläutern.

Anm. Da die praktische Ausführung dessen, was die Postulate fordern, der Anwendung des Lineals und Cirkels bedarf, so folgt hieraus, daß auch die praktische Auflösung jeder andern geometrischen Aufgabe mit Lineal und Cirkel zu bewerkstelligen ist, und daher die Auflösung einer Aufgabe nicht mehr für rein geometrisch gelten kann, wenn die praktische Ausführung derselben die Anwendung anderer Instrumente erfordert, als Lineal und Cirkel. — Hierbei ist jedoch nicht zu vergessen, daß die Auflösung einer geometrischen Aufgabe, so wie der Beweis eines Lehrsatzes eine rein geistige Operation ist, und daß die äußerlich entworfenen Zeichnungen nur bildliche Träger unserer inneren geistigen Vorstellungen sind, daß in den geometrischen Sätzen bloß von den in unserer Vorstellung existirenden Figuren die Rede ist und eine geometrische Figur nur innerlich angeschaut, niemals äußerlich dargestellt werden kann.

Bei den nächstfolgenden Aufgaben (§. 87 — 90) ist jedoch besonders auch auf die praktische Ausführung Rücksicht genommen.

§. 87. Aufgabe. (§. 96.*)

Eine gegebene gerade Linie zu halbiren.

(Analysis. In §. 86 haben wir gesehen, daß wenn zwei gleichschenklige Dreiecke ABC und ABD (Fig. 48) eine gemeinschaftliche Grundlinie AB haben, dieselbe durch die Linie CD, welche die Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke verbindet, halbirt wird. Hieraus ergiebt sich folgende)

Auflösung. Die gegebene Linie sei AB (Fig. 53); man beschreibe mit derselben Kreise um A und B, welche sich in C und D durchschneiden, und verbinde diese beiden Punkte durch eine gerade Linie, welche AB in E schneidet, so ist AB in diesem Punkte halbirt.

Beweis. Denn wenn man die Endpunkte A und B mit C und D verbindet, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke ABC und ABD mit der gemeinschaftlichen Grundlinie AB. In §. 86 haben wir gesehen, daß die Linie CD, welche die Spitzen dieser Dreiecke verbindet, die gemeinschaftliche Grundlinie AB halbirt. Folglich ist AB in E halbirt.

Anm. Statt AB könnte man auch jeden beliebigen andern Radius wählen; doch darf derselbe, damit die Kreise sich schneiden, nicht kleiner, als die Hälfte von AB sein.

§. 88. Aufgabe. (§. 97.)

Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

(Die Analysis ist ebenfalls in §. 86 enthalten.)

Auflösung. Um den Winkel A (Fig. 54) zu halbiren, beschreibe man um den Scheitel A mit einem beliebigen Radius einen Kreis, welcher die Schenkel des Winkels in B und C durchschneidet; hierauf beschreibe man mit demselben Radius um B und C Kreise, welche sich in D schneiden, und ziehe AD, so halbirt diese Linie den gegebenen Winkel A.

Beweis. Denn wenn man BC, BD und CD zieht, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke ABC und BCD mit der gemeinschaftlichen Grundlinie BC. In §. 86 haben wir gesehen, daß die Linie, welche die Spitzen dieser Dreiecke verbindet, die Winkel an der Spitze halbirt. Folglich halbirt die Linie AD den Winkel BAC.

---

*) Die eingeklammerte Paragraphenzahl ist diejenige, welche die Aufgabe in der früheren Auflage hatte.

Anm. Man hätte die Kreise um B und C auch mit einem andern Radius als AB beschreiben können; jedoch muß derselbe, damit die Kreise sich schneiden, größer, als $\frac{1}{2}$BC sein.

§. 89. Aufgabe. (§. 98.)

Auf einer Linie AB in einem in derselben gegebenen Punkte C ein Loth zu errichten (Fig. 55).

(Die Analysis ist in §. 85, 1 enthalten.)

Auflösung. Man beschreibe um den Punkt C mit einem beliebigen Radius einen Kreis, welcher die Linie AB in D und E schneidet; hierauf beschreibe man mit einem ebenfalls beliebigen, aber größeren Radius Kreise um D und E, welche sich in F schneiden, und ziehe CF, so ist diese Linie ein Loth auf AB.

Beweis. Denn wenn man DF und EF zieht, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck DEF, dessen Grundlinie DE in C halbirt ist; die Linie FC aber, welche die Spitze mit der Mitte der Grundlinie verbindet, ist nach §. 85, 1 auf der Grundlinie senkrecht.

§. 90. Aufgabe. (§. 99.)

Auf eine Linie BC aus einem Punkte A, welcher außerhalb derselben gegeben ist, ein Loth zu fällen (Fig. 54).

(Die Analysis ist in §. 86 enthalten.)

Auflösung. Man wähle in BC einen beliebigen Punkt B und beschreibe mit AB um A einen Kreis, welcher BC zum zweiten Male in C schneidet; hierauf beschreibe man um die Durchschnittspunkte B und C mit dem nehmlichen Radius Kreise, welche sich in D schneiden, und verbinde diesen Punkt mit A. Dann ist die Linie AD senkrecht auf BC.

Beweis. Denn wenn man noch BD und CD zieht, so haben die entstandenen gleichschenkligen Dreiecke ABC und DBC eine gemeinschaftliche Grundlinie BC, und die Linie AD, welche die Spitzen derselben verbindet, ist (nach §. 86) senkrecht auf der gemeinschaftlichen Grundlinie BC.

Anm. Sollte der um A mit AB beschriebene Kreis die Linie BC in B berühren, so würde AB selbst nach §. 84 das verlangte Loth sein.

§. 91. Aufgabe. (§. 87.)

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die drei Seiten gegeben sind.

Auflösung. Die gegebenen Seiten seien a, b und c (Fig. 49). Man ziehe eine willkührliche Linie, schneide von derselben eine der gegebenen Seiten a = DE ab, beschreibe um den einen Endpunkt D mit b und um den andern Endpunkt E mit c einen Kreis. Diese Kreise schneiden sich in den Punkten F und G. Einen derselben, z. B. F, verbinde man mit D und E, so ist DEF das verlangte Dreieck.

Beweis. Denn die Seite DE ist = a, DF = b und EF = c gemacht.

Anm. Die Bedingungen, welche von den gegebenen Linien a, b und c erfüllt sein müssen, damit die Aufgabe möglich ist, sind unten in §. 156 erörtert.

§. 92. Zusatz. (§. 88.)

Folgende zwei Aufgaben sind nach Anleitung des vorhergehenden §. sehr leicht zu lösen:

1) Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem die Grundlinie und eine Seite gegeben sind; und

2) Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, von welchem eine Seite gegeben ist.

§. 93. Aufgabe. (§. 89.)

Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Linie in einem gegebenen Punkte anzutragen.

Auflösung. Um den Winkel ABC (Fig. 50) an die Linie DE im Punkte D anzutragen, beschreibe ich mit einem beliebigen Radius einen Kreis um B, welcher die Schenkel AB und AC in den Punkten F und G schneidet, und mit demselben Radius einen Kreis um D, welcher DE in H schneidet, hierauf verbinde ich F und G (praktisch: messe FG mit dem Cirkel), und beschreibe mit der Linie FG einen Kreis um H, welcher den um D beschriebenen Kreis in zwei Punkten K und L durchschneidet. Einen derselben, z. B. K, verbinde ich mit D, so ist Winkel KDH der verlangte.

Beweis. Denn wenn ich KH ziehe, so ist das entstandene Dreieck KDH $\cong$ FBG aus Gleichheit dreier Seiten (DK = BF, DH = BG, KH = FG nach der Construction), folglich auch Winkel KDH = FBG, w. z. e. w.

§. 94. Aufgabe. (§. 90.)

Durch einen Punkt G außerhalb einer Linie CD (Fig. 17) mit derselben eine Parallele zu ziehen.

Auflösung. Man wähle in CD einen beliebigen Punkt H und verbinde denselben mit dem gegebenen Punkte G, hierauf verlängere man GH beliebig über G, trage an die Verlängerung EG im Punkte G den Winkel GHD (und zwar an derselben Seite, an welcher Winkel GHD liegt,) an und verlängere den zweiten Schenkel dieses Winkels BG über G um ein beliebiges Stück AG, so ist AB die verlangte Linie.

Beweis. Die Linie AB ist || CD (nach §. 39), weil Winkel EGB = GHD construirt ist.

Anm. Es braucht kaum gesagt zu werden, daß auch §. 44, 2 eine bequeme Auflösung liefert.

§. 95. Aufgabe. (§. 91.)

Durch einen außerhalb einer Linie AB (Fig. 51) gegebenen Punkt C eine Linie so zu ziehen, daß sie mit AB (nach der Seite von B hin) einen gegebenen Winkel α bildet.

Auflösung. Man wähle in AB einen willkührlichen Punkt D, trage in diesem an DB (an der Seite, an welcher der gegebene Punkt C liegt,) nach §. 89 einen Winkel EDB = α an und ziehe durch C die Linie CF || ED, so ist dieses die verlangte Linie.

Beweis. Denn da CF || ED ist, so ist Winkel CFE = EDB, und da Winkel EDB = α gemacht ist, so ist auch Winkel CFD = α, w. z. e. w.

§. 96. Aufgabe. (§. 92.)

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.

§. 97. Aufgabe. (§. 93.)

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

Die Auflösungen dieser beiden Aufgaben sind äußerst leicht zu finden und daher hier der Kürze wegen übergangen.

§. 98. Aufgabe. (§. 94.)

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem eine Seite α, ein anliegender Winkel β und der gegenüberliegende Winkel γ gegeben sind.

Auflösung. Wenn ich vermittelst §. 89 die beiden gegebenen Winkel β und γ addire und diese Summe von einem Flachen subtrahire, so erhalte ich den dritten Winkel des zu zeichnenden Dreiecks, wodurch diese Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt ist.

Anm. Eine zweite sehr bequeme Auflösung liefert §. 91. 5

***§. 99. Aufgabe.** (§. 95.)

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem zwei Seiten α und β und der der einen β gegenüberliegende Winkel γ gegeben sind (Fig. 52).

Auflösung. Man zeichne einen Winkel $A = \gamma$, schneide von dem einen Schenkel vom Scheitelpunkte aus das Stück $AC = \alpha$ ab und beschreibe um C mit β einen Kreis, welcher den andern Schenkel in zwei Punkten B und D durchschneidet; verbindet man dann einen derselben, z. B. B mit C, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Der Beweis ist in der Construction enthalten.

Bedingungen. Wenn man den andern Durchschnittspunkt D mit C verbindet, so entsteht ein zweites, von dem ersten verschiedenes Dreieck ACD, welches ebenfalls die gegebenen Stücke enthält: $AC = \alpha$, $CD = \beta$ und Winkel $CAD = \gamma$. Die beiden Dreiecke ACD und ACB stimmen also in zwei Seiten und einem Winkel an der dritten überein (Seite AC und Winkel A gemeinschaftlich und Seite $CD = CB$), und die beiden anderen Winkel an der dritten Seite ACD und ABC ergänzen sich zu einem Flachen (vergl. §. 77).

Damit aber zwei Dreiecke entstehen können, muß Winkel γ ein spitzer und Seite β kleiner, als α, aber größer, als das aus C auf AB gefällte Loth CE sein.

Ist nehmlich $\beta > \alpha$, so schneidet der um C mit β beschriebene Kreis nach §. 84 zum zweiten Male nicht die Linie AB selbst, sondern ihre Verlängerung über A, und die Aufgabe hat dann nur eine Auflösung. Dieses Letztere gilt auch, wenn $\alpha = \beta$ ist.

Ist aber $\beta < CE$, so trifft der Kreis die Linie AB gar nicht, und die Aufgabe ist überhaupt nicht zu lösen.

Ist $\beta = CE$, so berührt der Kreis um C die Linie AB in E, und es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck ACE.

Uebungsaufgaben.

A. Dreiecksaufgaben *).

Aufgabe 1. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die Höhe $= \alpha$, eine Seite $= \beta$ und der Winkel an der Spitze $= \gamma$ gegeben ist. (Fig. 56.)

*) Die vollständige Bearbeitung der beiden ersten Aufgaben kann zum Muster für die Behandlung der übrigen dienen.

Analysis. Ich denke mir die Aufgabe bereits gelöst und nehme an, daß in dem Dreieck ABC die Seite AC = β, der Winkel ACB = γ und die Höhe CD = α ist. In dem Dreiecke ABC selbst kenne ich nur zwei Stücke, Seite AC und Winkel ACB; aus zwei Stücken allein aber läßt sich kein Dreieck zeichnen. In dem rechtwinkligen Dreiecke ACD dagegen kenne ich außer dem rechten Winkel ADC noch die Seiten CD und AC; ich bin daher im Stande, dieses Dreieck nach §. 95 zu zeichnen. Habe ich aber Dreieck ACD erhalten, so fehlt mir allein noch der Punkt B, welchen ich leicht mit Hülfe des gegebenen Winkels ACB finde.

Auflösung. Man zeichne einen rechten Winkel CDA (Fig. 56), schneide von dem einen Schenkel α = CD ab, beschreibe um C mit β einen Kreis, welcher den andern Schenkel des rechten Winkels in A schneidet, ziehe AC und trage in C Winkel γ so an, daß ein Schenkel auf die Linie AC fällt. Schneidet nun der andere Schenkel die verlängerte AD in B, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Der Beweis ist in der Construction enthalten.

Bedingungen. 1. Die Höhe α darf offenbar nicht größer sein, als die gegebene Seite β. — Ist $\alpha = \beta$, so wird das gesuchte Dreieck rechtwinklig.

2. Wenn der Winkel $\gamma <$ CAD ist, so läßt sich derselbe auch in C an der andern Seite von AC antragen, und das entstandene Dreieck CAE enthält ebenfalls die verlangten Stücke: Winkel ACE = γ, Seite AC = β, Höhe CD = α; die Aufgabe hat also zwei verschiedene Auflösungen. Wenn dagegen Winkel $\gamma >$ oder = CAD ist, so hat die Aufgabe nur eine Auflösung. Sollte aber Winkel γ eben so groß oder größer, als der Winkel CAE sein, so wäre die Aufgabe gar nicht zu lösen.

Anm. Auch hier tritt wieder der in §. 77 besprochene Fall ein, daß in den Dreiecken ACB und ACE, welche beide die drei gegebenen Stücke enthalten, sich zwei Winkel CAB und CAE zu einem Flachen ergänzen, wie dieß überhaupt bei Dreiecksaufgaben der Fall zu sein pflegt, welche eine zweifache Auflösung zulassen.

Aufgabe 2. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die Grundlinie = α, ein Winkel an derselben = β und die Summe der beiden anderen Seiten = γ gegeben ist.

Analysis. Wenn ABC (Fig. 32) das gesuchte Dreieck und AB = α, Winkel A = β und AC + BC = γ ist, so kenne ich unmittelbar in demselben nur zwei Stücke, Seite AB und Winkel A. Hieraus aber kann ich dasselbe nicht zeichnen. Um das dritte gegebene Stück AC + BC für die Auflösung benutzen zu können, habe ich dasselbe vor allen Dingen zu construiren. Ich verlängere daher AC über C um BC bis D, und indem ich noch D mit B verbinde, erhalte ich ein Dreieck ABD, in welchem ich drei Stücke kenne, nehmlich Seite AD = γ, AB = α und Winkel DAB = β. Habe ich hieraus Dreieck ABD gezeichnet, so fehlt mir allein noch der Punkt C, welcher sich mir daraus ergiebt, daß Seite CD = CB, also auch Winkel CBD = CDB ist.

Aufl. Man zeichne einen Winkel A = β, schneide von dem einen Schenkel α = AB und vom andern γ = AD ab, ziehe BD und lege in B den entstandenen Winkel ADB so an, daß ein Schenkel auf BD fällt. Schneidet nun der andere Schenkel AD in C, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Der Winkel A ist = β und Seite AB = α construirt. Drittens ist auch AC + CB = γ. Denn da Winkel CBD = CDB gemacht ist, so ist auch CB = CD, folglich AC + CB = AC + CD = AD, welches = γ gemacht ist.

Bedingung. γ muß $> \alpha$ sein; (entgegengesetzten Falles ließe sich Winkel D nicht von ABD abschneiden.)

Aufgabe 3 — 7. Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

3) beide Catheten;

4) die Hypotenuse und eine Cathete;

5) die Hypotenuse und ein anliegender spitzer Winkel;

6) eine Cathete und der anliegende spitze Winkel;

7) eine Cathete und der gegenüberliegende spitze Winkel.

Aufgabe 8 — 13. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

8) die Höhe und Grundlinie:

9) die Höhe und eine Seite;

10) die Höhe und der Winkel an der Spitze;

11) die Höhe und ein Winkel an der Grundlinie;

12) die Grundlinie und das aus einem Endpunkte derselben auf eine Seite (oder ihre Verlängerung) gefällte Loth;

13) eine Seite und das auf diese Seite (oder ihre Verlängerung) aus der gegenüberliegenden Ecke gefällte Loth (zwei Auflösungen *).

Aufgabe 14 — 18. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

14) die Höhe, die Grundlinie und eine Seite (zwei Auflösungen);

15) die Höhe, die Grundlinie und ein Winkel an derselben;

16) die Höhe und beide Seiten (zwei Auflösungen);

17) die Höhe, eine Seite und der dieser Seite gegenüberliegende Winkel (zwei Auflösungen);

18) die Höhe und die beiden Winkel an der Grundlinie.

Aufgabe 19 — 30. Wenn wir die Abschnitte, in welche die Grundlinie durch die Höhe getheilt wird, welche wir kurzweg die Segmente nennen wollen, unter die gegebenen Stücke aufnehmen, so lassen sich weiter folgende Aufgaben aufstellen, bei denen wir uns jedoch um größerer Einfachheit willen auf den Hauptfall beschränken, daß die Höhe innerhalb des Dreiecks fällt: — Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

19) die beiden Segmente und die Höhe;

20) die beiden Segmente und eine Seite;

21) die beiden Segmente und ein Winkel an der Grundlinie **);

22) der Unterschied der Segmente und die beiden Seiten;

23) der Unterschied der Segmente, die Höhe und eine Seite;

24) der Unterschied der Segmente, die Höhe und ein Winkel an der Grundlinie;

25) der Unterschied der Segmente, eine Seite und der ihr anliegende Winkel an der Grundlinie;

26) der Unterschied der Segmente, eine Seite und der ihr gegenüberliegende Winkel;

27) der Unterschied der Segmente und die beiden Winkel an der Grundlinie;

28) der Unterschied der Winkel an der Grundlinie und beide Seiten;

29) der Unterschied der Winkel an der Grundlinie, der Unterschied der Segmente und eine Seite;

30) der Unterschied der Winkel an der Grundlinie, die Höhe und eine Seite.

Aufgabe 31 — 37. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

31) die Grundlinie, ein Winkel an derselben und der Unterschied der beiden Seiten;

32) die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und die Summe der beiden Seiten;

33) die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und der Unterschied der beiden Seiten;

---

*) d. h. es lassen sich aus den gegebenen Stücken zwei verschiedene gleichschenklige Dreiecke zeichnen.

**) Man erhält eine weitere Reihe eben so leicht zu lösender Aufgaben, wenn man nur ein Segment und noch zwei andere Stücke des Dreiecks als gegeben annimmt.

34) die beiden Winkel an der Grundlinie und die Summe der beiden Seiten;

35) die beiden Winkel an der Grundlinie und der Unterschied der beiden Seiten;

36) zwei Winkel und die Summe aller drei Seiten;

37) zwei Winkel und der Unterschied, um welchen die Summe zweier Seiten die dritte übertrifft *).

B. Vermischte Aufgaben.

Aufgabe 38 — 41. In dem einen Schenkel eines Winkels, dessen Scheitel A heißen soll, ist ein Punkt P gegeben, es soll in dem andern Schenkel ein Punkt X so gefunden werden, daß, wenn man P mit X verbindet:

38) PX = AX wird;

39) PX + AX einer gegebenen Linie gleich wird;

40) PX die Linie AX um die Länge einer gegebenen Linie übertrifft;

41) PX von AX um eine gegebene Länge übertroffen wird.

Aufgabe 42 — 43. Es ist eine unbegrenzte Linie AB und an derselben Seite dieser Linie sind zwei Punkte P und Q gegeben; es soll in der Linie AB ein Punkt X so gefunden werden, daß, wenn man X mit P und Q verbindet, die Verbindungslinien

42) einander gleich werden;

43) mit AB gleiche Winkel bilden.

Aufgabe 44 — 45. Dieselben Aufgaben wie vorher, wenn die beiden Punkte P und Q an entgegengesetzten Seiten von AB liegen.

Aufgabe 46 — 48. In einem gegebenen Dreiecke ABC soll parallel mit der Grundlinie AB eine die Seiten AC und BC in den Punkten X und Y durchschneidende Linie so gezogen werden, daß

46) XY = AX wird;

47) XY = AX + BY wird;

48) XY = AX — BY wird.

Aufgabe 49 — 50. Die Aufgaben 46 und 47 mit der Abänderung, daß XY nicht die Seiten selbst, sondern ihre über A und B fortgesetzten Verlängerungen durchschneiden soll.

Aufgabe 51. Warum kann in diesem Falle niemals XY = AX—BY werden?

Aufgabe 52. Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen **).

Fünfter Abschnitt.

Von den Vierecken.

A. Vom Vierecke im Allgemeinen.

Bemerkung. Jedes Viereck läßt sich durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerschneiden und somit die Betrachtung des Vierecks sich auf die des Dreiecks zurückführen. Wir werden uns daher beim Viereck auf eine weit geringere Zahl von Sätzen beschränken und nur einige besonders wichtige hervorheben.

*) Noch andere Dreiecksaufgaben entstehen, wenn man die Linie, welche den Winkel an der Spitze halbirt, oder die Linie, welche die Spitze mit der Mitte der Grundlinie verbindet, unter die gegebenen Stücke aufnimmt.

**) Für die Aufgabe, einen beliebigen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen, kennt man keine rein geometrische Auflösung.

Wenn ein Viereck einen erhabenen Winkel hat (Fig. 57, b), so fällt nur die eine Diagonale innerhalb, die andere außerhalb des Vierecks; jedesmal aber fällt eine Diagonale innerhalb, und es ist daher immer möglich, das Viereck durch eine innerhalb fallende Diagonale in zwei Dreiecke zu zerschneiden.

§. 100. Lehrsatz.

Die Summe der Winkel eines jeden Vierecks ist gleich zwei Flachen.

Beweis. Man zerschneide das Viereck ABCD (Fig. 57, a und b) durch eine Diagonale AC in zwei Dreiecke ABC und ACD. Nach §. 55 betragen die Winkel eines jeden Dreiecks einen Flachen; also ist im Dreiecke ABC $m+q+o = \pi$
und im Dreiecke ACD $n+p+r = \pi$,
folglich wenn ich addire:

$$m+q+o+n+p+r = 2\pi.$$

Statt $m+n$ kann ich A, statt q B, statt $o+p$ C und statt r D setzen; dann erhalte ich $A+B+C+D = 2\pi$.

§. 101. Zusatz.

Auf gleiche Weise läßt sich zeigen, daß überhaupt in einem Vielecke, welches nur hohle Winkel hat, die Summe aller Winkel zwei Flache weniger ausmacht, als das Vieleck Seiten hat.

Beweis. Denn wenn zunächst ein Fünfeck ABCDE (Fig. 58) gegeben ist, so läßt sich dasselbe durch Diagonalen aus einer Ecke A gezogen in drei Dreiecke, ABC, ACD und ADE, zerschneiden. Da nun die Winkel dieser Dreiecke nach §. 55 drei Flache ausmachen und zusammen genommen den Winkeln des Fünfecks ABCDE gleich sind, so betragen folglich auch die Winkel des Fünfecks zusammen drei Flache.

Eben so findet man, daß in einem Sechsecke die Summe aller Winkel gleich vier Flachen, in einem Siebenecke gleich fünf Flachen und überhaupt in einem Vielecke von n Seiten gleich $n-2$ Flachen ist, vorausgesetzt, daß alle Winkel des Vielecks hohle sind.

Anm. Schwieriger ist der Beweis bei Vielecken mit erhabenen Winkeln zu führen, da diese sich nicht immer durch Diagonalen, aus einer Ecke gezogen, in Dreiecke zerschneiden lassen. Von Vielecken, deren Seiten nicht unter sich zusammenhängen, wie z. B. von dem Achtecke ABCDEFGH (Fig. 59), gilt der Satz überhaupt nicht.

Wenn alle Winkel eines Vielecks einander gleich sind, wie dieß in dem regelmäßigen Vielecke der Fall ist, und das Vieleck n Seiten hat, so ist nach dem Obigen die Summe aller Winkel $= (n-2)\pi$, folglich einer allein $= \frac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n}$

oder in Graden ausgedrückt $= 180^0 - \frac{360^0}{n}$.

Der Winkel eines regelmäßigen Vielecks wird also um so größer, er nähert sich um so mehr einem Flachen, jemehr das Vieleck Seiten hat und sich selbst folglich dem Kreise nähert.

Bemerkung. An jedem Vierecke unterscheidet man unmittelbar 8 Stücke, nehmlich 4 Seiten und 4 Winkel. Versucht man es, mit Hülfe derselben das Viereck abzuzeichnen, so findet man leicht, daß hierzu drei

Seiten und die beiden zwischenliegenden Winkel oder drei Winkel und die beiden zwischenliegenden Seiten ausreichen. Auf diese Art erhält man die beiden folgenden Congruenzsätze, welche den beiden ersten Congruenzfällen der Dreiecke (§. 70 und 71) entsprechen.

§. 102. Lehrsatz.

1) Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie in drei Seiten und den zwischenliegenden Winkeln übereinstimmen.

2) Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie in drei Winkeln und den zwischenliegenden Seiten übereinstimmen.

Die Beweise sind dieselben wie von §. 70 und 71.

Bemerkung. Im Allgemeinen kann man annehmen, daß ein Viereck durch 5 Stücke (Seiten oder Winkel) bestimmt wird, wobei jedoch alle 4 Winkel, vermöge §. 100, nur für 3 Stücke zählen. Hierbei können indeß dergleichen zwei= oder mehrdeutige Fälle vorkommen, wie wir zuerst beim Dreiecke in §. 77 kennen gelernt haben. Wir übergehen aber diese Sätze aus den oben angegebenen Gründen und wenden uns sogleich zur Betrachtung des wichtigsten Vierecks.

B. Vom Parallelogramme.

§. 103. Erklärung.

Ein Viereck, in welchem die gegenüberstehenden Seiten parallel laufen, heißt ein Parallelogramm.

§. 104. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Winkel gleich.

Beweis. Wenn ABCD (Fig. 60) ein Parallelogramm ist, so ist AB || CD und AD || BC. Bei parallelen Linien betragen die Ergänzungswinkel einen Flachen. Also ist

$A+B = \pi$, weil AD || BC ist,

und $A+D = \pi$, weil AB || CD ist,

folglich $B = D$.

Eben so wird $A = C$ erwiesen.

Anm. Auch der umgekehrte Satz ist richtig (und leicht zu erweisen): ein Viereck, in welchem die gegenüberstehenden Winkel gleich sind, ist ein Parallelogramm.

§. 105. Zusatz.

Ist in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter, so sind sie alle rechte.

Beweis. Wenn in dem Parallelogramme ABCD (Fig. 61) Winkel A als ein rechter vorausgesetzt ist, so muß auch C ein rechter sein, weil zu Folge des vorhergehenden §. in jedem Parallelogramme die gegenüberstehenden Winkel gleich sind. Da nun A und C als Rechte zusammen einen Flachen ausmachen und alle Winkel eines Vierecks nach §. 100 zwei Flache betragen, so bleibt für B und D noch ein Flacher übrig. Da sie aber als gegenüberstehende Winkel im Parallelogramme gleich sind, so kommt folglich auf jeden ein Rechter.

§. 106. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten gleich.

Beweis. Man zerschneide das Parallelogramm ABCD (Fig. 62) durch eine Diagonale AC in zwei Dreiecke ABC und ADC, welche congruent sind, weil sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, nehmlich AC = AC

W. m = p, weil AB ∥ CD ist,

und W. o = n, weil AD ∥ BC ist,

folglich △ ABC ≌ CDA nach §. 71,

also auch AB = CD

und BC = AD.

§. 107. Zusatz.

Die Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke.

Der Beweis ist im vorhergehenden §. enthalten.

Anm. Durch Umkehrung des vorletzten Satzes geht der folgende hervor.

§. 108. Lehrsatz.

Sind in einem Vierecke die gegenüberstehenden Seiten gleich, so sind sie auch parallel, und das Viereck ist folglich ein Parallelogramm.

Beweis. Wenn also AB = CD und AD = BC (Fig. 62) gegeben ist, so soll AB ∥ CD und AD ∥ BC erwiesen werden. — Um dieses zu zeigen, ziehe ich wieder eine Diagonale von A nach C. — Die hierdurch entstandenen Dreiecke ABC und ACD sind congruent, weil sie in den drei Seiten übereinstimmen, nehmlich AC = AC

AB = CD }
BC = AD } vorausgesetzt,

folglich △ ABC ≌ CDA nach §. 75,

daher auch W. m = p

und n = o.

Da nun Winkel m = p erwiesen ist, so muß auch AB ∥ CD sein, und da Winkel n = o ist, so muß AD ∥ BC sein; denn wenn die Wechselwinkel gleich sind, so sind Linien (nach §. 43) parallel.

Anm. Wir haben den letzten Satz erhalten, indem wir die beiden Folgerungen des §. 106, AB = CD und AD = BC, als Voraussetzungen annahmen. Behalten wir von den beiden Voraussetzungen des §. 106 (AB ∥ CD und AD ∥ BC) die eine AB ∥ CD bei und nehmen statt der andern die Folgerung AB = CD mit in die Voraussetzung, so geht ein neuer ebenfalls richtiger Satz hervor.

§. 109. Lehrsatz.

Sind in einem Vierecke ein Paar gegenüberstehende Seiten parallel und gleich, so sind auch die anderen beiden Seiten parallel und gleich, und das Viereck ist folglich ein Parallelogramm.

Beweis. Es sei also in dem Viereck ABCD (Fig. 62) AB ∥ CD und AB = CD gegeben, so ist zu zeigen, daß auch AD ∥ BC und AD = BC ist. — Ich ziehe wieder die Diagonale AC; — die entstandenen Dreiecke ABC

und ADC sind congruent, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, nehmlich

AC = AC

AB = CD vorausgesetzt,

W. m = p, weil AB || CD vorausgesetzt ist,

folglich △ ABC ≌ CDA nach §. 70,

daher auch BC = AD

und W. o = n.

Da nun Winkel n = o erwiesen ist, so muß auch nach §. 43 AD || BC sein.

Anm. Wollte man die beiden Voraussetzungen AB || CD und AD = BC (Fig. 62) mit einander verbinden, so würden zwar die beiden Dreiecke ABC und ACD in zwei Seiten (AC = AC und AD = BC) und einem Winkel an der dritten (Winkel m = p) übereinstimmen, sie würden aber dann zu Folge §. 77 nicht nothwendig congruent sein. Es könnten nehmlich auch die beiden anderen Winkel an der dritten Seite, Winkel B und D (Fig. 63), sich zu einem Flachen ergänzen. Wenn also in einem Vierecke ein Paar gegenüberstehende Seiten parallel und das andere Paar gleich gegeben sind, so läßt sich nicht unbedingt behaupten, daß das Viereck ein Parallelogramm ist.

§. 110. Zusatz.

1) Parallele Linien zwischen parallelen Linien sind gleich.

2) Lothe zwischen parallelen Linien sind gleich. — Man sagt daher: parallele Linien stehen überall gleich weit von einander ab.

3) Wenn mehrere Punkte von einer geraden Linie gleichen Abstand haben, so liegen diese Punkte in einer zu der gegebenen Linie parallelen geraden Linie.

Beweis. 1) Wenn zwischen den beiden parallelen Linien AB und CD (Fig. 64) irgend zwei parallele Linien EF und GH gezogen werden, so ist das entstandene Viereck EFHG ein Parallelogramm und folglich EF = GH, weil nach §. 106 in jedem Parallelogramme die gegenüberstehenden Seiten gleich sind.

2) Da die Lothe CF und DG, welche zwischen den Parallelen AB und CE (Fig. 65) gezogen sind, nach §. 47 einander parallel sind, so müssen sie nach Nro. 1 auch gleich sein.

3) Wenn die Punkte C, D und E (Fig. 65) von der geraden Linie AB gleichen Abstand haben, d. h. wenn die Lothe CF, DG und EH einander gleich sind, so liegen die Punkte C, D und E in einer zu AB parallelen geraden Linie. — Um dieses zu zeigen, ziehe ich durch einen der gegebenen Punkte, z. B. C, eine Parallele zu AB und nehme an, diese ginge nicht durch die Punkte D und E, sondern schnitte die Lothe DG und EH (oder ihre Verlängerungen) in anderen Punkten K und L, so müßten nach Nro. 2 KG und LH = CF sein, welches doch nicht möglich ist, da DG und EH = CF vorausgesetzt sind. Demnach kann die durch C mit AB gezogene Parallele die Lothe DG und EH nur in den Punkten D und E durchschneiden, und folglich liegen die Punkte C, D und E in einer mit AB parallelen geraden Linie.

§. 111. Lehrsatz.

Die Diagonalen eines Parallelogramms halbiren sich gegenseitig.

Dieser Punkt, in welchem sich die Diagonalen durchschneiden, heißt der **Mittelpunkt** des Parallelogramms.

Beweis. Das gegebene Parallelogramm sei ABCD (Fig. 66). Die beiden Dreiecke ABE und CDE sind congruent, weil sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, nehmlich

AB = CD, als gegenüberstehende Seiten im Parallelogramm,

und Winkel o = m, Winkel p = n } weil AB || CD ist,

folglich △ ABE ≌ CDE nach §. 71,

und daher auch AE = CE

und BE = DE, w. z. b. w.

Anm. 1. Auch der umgekehrte Satz ist richtig: Ein Viereck, dessen Diagonalen sich halbiren, ist ein Parallelogramm.

Anm. 2. Der Mittelpunkt des Parallelogramms hat die Eigenschaft, daß jede durch denselben gezogene Linie das Parallelogramm in zwei congruente Hälften zerschneidet.

§. 112. Erklärung.

Ein Parallelogramm, in welchem alle Winkel rechte sind, heißt ein **Rechteck**, und ein Parallelogramm, in welchem alle Seiten gleich sind, wird **Raute** oder **Rhombus** genannt. Sind in einem Viereck alle Seiten gleich und alle Winkel rechte, so heißt dasselbe ein Quadrat.

Anm. 1. Manche Schriftsteller fügen beim Rechteck noch die Bedingung hinzu, daß die zusammenstoßenden Seiten ungleich, und beim Rhombus, daß die Winkel schiefe sein müssen, was indeß weniger zweckmäßig ist. Nach der hier aufgestellten Erklärung ist der engere Begriff des Quadrats sowohl in dem weiteren des Rechtecks, als in dem des Rhombus enthalten, so daß alle Sätze über das Rechteck oder Rhombus auch vom Quadrate gelten müssen. Nach der entgegengesetzten Behandlungsweise müßte jeder vom Rechteck oder Rhombus dargethane Satz noch besonders wieder vom Quadrate erwiesen werden.

In älterer Zeit gab man auch wohl einem Parallelogramme, in welchem die Winkel schief und die zusammenstoßenden Seiten ungleich sind, den Namen **Rhomboides**.

Anm. 2. Folgende Sätze sind leicht zu erweisen:

1) Im Rechtecke sind die Diagonalen einander gleich;
2) im Rhombus stehen sie auf einander senkrecht, und folglich müssen
3) im Quadrate die Diagonalen sowohl gleich sein, als auf einander senkrecht stehen.
4) Alle drei Behauptungen gelten auch umgekehrt.

C. Vom Trapeze.

§. 113. Erklärung.

Ein Viereck, in welchem zwei Seiten parallel laufen, heißt ein **Trapez**.

Anm. Viele Schriftsteller nennen dieses ein **Paralleltrapez**.

Beim Trapez bleibt es unentschieden, ob die beiden anderen Seiten auch parallel sind oder nicht. Das Parallelogramm ist daher ein besonderer Fall des Trapezes, und alle Sätze vom Trapeze müssen folglich auch vom Parallelogramme gelten.

Wenn wir im Folgenden an einigen Stellen von den beiden nicht parallelen Seiten eines Trapezes sprechen, so ist dieß ein abgekürzter Ausdruck und soll eigentlich heißen: „die beiden Seiten, welche nicht ausdrücklich als parallel gegeben sind und daher eben so wohl nicht parallel, als parallel sein können“.

§. 114. Lehrsatz.

1) Wenn man in einem Trapeze ABCD (Fig. 67) eine der nicht parallelen Seiten AD halbirt und durch den Halbirungspunkt E eine Parallele EF zu den parallelen Seiten zieht, so halbirt dieselbe auch die andere nicht parallele Seite BC; und umgekehrt:

2) Wenn eine Linie die Mitten E und F der nicht parallelen Seiten eines Trapezes verbindet, so ist sie den parallelen Seiten AB und CD parallel, und

3) die Verbindungslinie EF ist der halben Summe der beiden parallelen Seiten AB und CD gleich und wird die mittlere Länge des Trapezes genannt.

Beweis. 1) Um zu zeigen, daß BC im Punkte F halbirt ist, ziehe ich durch diesen Punkt mit AD eine Parallele, welche AB in H und die verlängerte CD in G schneidet. Nun sind die entstandenen Dreiecke BFH und CFG congruent, weil sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen. Es ist nehmlich FH = AE, als Parallelen zwischen Parallelen, AE = DE vorausgesetzt und DE = FG, wieder als Parallelen zwischen Parallelen; folglich ist auch

$$FH = FG.$$

Ferner ist W. HFB = CFG, als Scheitelwinkel,
und W. FHB = FGC, weil AB || DG ist,
folglich △ BFH ≌ CFG nach §. 72,
also auch BF = CF.
Demnach ist BC in F halbirt.

2) Wenn E und F die Mitten von AD und BC sind, so muß EF parallel mit AB (und CD) sein. Denn gesetzt, dieses wäre nicht der Fall, so ließe sich durch den Punkt E eine andere Linie EK || AB ziehen. Dann wäre nach Nro. 1 BC in K halbirt, welches doch nicht möglich ist, da der Punkt F als die Mitte von BC gegeben ist. Demnach ist nicht EK, sondern EF mit AB (und CD) parallel.

3) Aus der in Nro. 1 erwiesenen Congruenz der Dreiecke BFH und CFG folgt auch noch BH = CG. Da nun AH = EF = DG ist, als gegenüberstehende Seiten in Parallelogrammen, so ist

$$EF = AB - BH$$

und auch $EF = CD + CG$,
folglich wenn wir addiren: $2EF = AB + CD$,
also $EF = \frac{AB + CD}{2}$.

*§. 115. Zusatz.

Das Stück BH, welches die durch die Mitte F der Seite BC mit AD parallel gezogene Linie FH von der größeren Parallelen AB abschneidet, ist dem halben Unterschiede der beiden parallelen Seiten AB und CD gleich (Fig. 67).

Beweis. Nach dem vorhergehenden §. übertrifft AB die Linie EF um BH und EF die Linie CD um das eben so große Stück CG. Demnach übertrifft AB die Seite CD um das Doppelte von BH, also ist

$$2BH = AB - CD$$

und $$BH = \frac{AB - CD}{2}$$

Bemerkung. Wenn wir in einem Trapeze die kürzere Parallele verschwinden lassen, so verwandelt sich das Trapez in ein Dreieck und der vorhergehende Lehrsatz (§. 114) in den folgenden:

§. 116. Lehrsatz.

1) Wenn man in einem Dreiecke ABC (Fig. 68) eine Seite AC halbirt und durch den Halbirungspunkt D mit der Grundlinie AB eine Parallele DE zieht, so halbirt diese auch die andere Seite BC.

2) Eine Linie, welche die Mitten D und E zweier Seiten eines Dreiecks verbindet, ist der dritten Seite AB parallel.

3) Diese Verbindungslinie DE ist der Hälfte der dritten Seite AB gleich.

Beweis. 1) Um zu zeigen, daß BC in E halbirt ist, ziehe ich durch den Punkt E mit AC eine Parallele EF. Dann sind die entstandenen Dreiecke BEF und ECD congruent, weil sie in einer Seite, einem anliegenden und einem gegenüberstehenden Winkel übereinstimmen; es ist nehmlich Seite EF = AD als gegenüberstehende Seiten im Parallelogramme ADEF, und da AD = CD gemacht ist, so ist folglich auch

EF = CD.

Ferner ist W. FBE = DEC, weil BF || ED vorausgesetzt ist,
und W. FEB = DCE, weil EF || CD gemacht ist,
folglich △ BEF ≌ ECD nach §. 72
und daher Seite BE = CE,
also BC in E halbirt.

2) Wenn die Punkte D und E die Mitten der Seiten AC und BC sind, so muß DE parallel AB sein, welches eben so indirect aus Nr. 1 gefolgert wird, wie dieß in §. 114 geschehen ist.

3) Aus der in Nro. 1 erwiesenen Congruenz der Dreiecke BEF und ECD folgt auch BF = DE, und da auch AF = DE ist, als gegenüberstehende Seiten im Parallelogramm ADEF, so ist AB doppelt so groß, als DE.

Anm. Es sind daher in dem Dreiecke CDE alle Seiten halb so groß, als in dem Dreiecke ABC.

Bemerkung. Aus der Verknüpfung der beiden letzten Lehrsätze (§. 114 und 116) geht der folgende Satz hervor.

§. 117. Zusatz.

Wenn mehrere parallele Linien, AB, CD, EF, GH und KL (Fig. 69), von einer schneidenden Linie AK gleiche Stücke (AC = CE = EG = GK) abschneiden, so theilen sie auch jede andere schneidende Linie AP oder BL in gleiche Theile.

Beweis. Da in dem Dreiecke AEN nach der Voraussetzung AC = CE, also Seite AE in C halbirt und die Linie CM mit der dritten Seite EN parallel ist, so ist nach §. 116 auch die Seite AN in M halbirt und folglich AM = MN. — Eben so ist im Trapeze CGOM die Seite CG in E halbirt

und EN mit den parallelen Seiten CM und GO parallel, folglich nach §. 114 MN = NO.

Auf gleiche Weise kann NO = OP, ferner BD = DF = FH = HL erwiesen werden.

Anm. 1. Aus §. 116 ergiebt sich auch leicht der Beweis des folgenden Satzes:

1) Wenn man in einem beliebigen Vierecke die Mitten je zweier zusammenstoßenden Seiten verbindet, so ist das von den Verbindungslinien gebildete Viereck ein Parallelogramm.

2) Ist das gegebene Viereck ein Rechteck, so ist das entstandene Viereck eine Raute, und

3) ist jenes eine Raute, so ist dieses ein Rechteck.

Anm. 2. Auch die folgenden Sätze sind nicht schwer zu erweisen:

1) Die Halbirungslinien der Winkel eines Parallelogramms schließen ein Rechteck ein, und

2) die Halbirungslinien der Winkel eines Rechtecks bilden ein Quadrat.

Anm. 3. Man pflegt ein Trapez, in welchem die nicht parallelen Seiten einander gleich sind, ein Antiparallelogramm zu nennen; — demselben kommen folgende Eigenschaften zu:

In einem Antiparallelogramm sind die Diagonalen und die an der nehmlichen parallelen Seite liegenden Winkel einander gleich.

D. Aufgaben.

§. 118. Aufgabe.

Ein Parallelogramm zu zeichnen, von welchem zwei Seiten α und β (Fig. 60) und ein Winkel γ gegeben sind.

Aufl. Man zeichne einen Winkel A = γ, schneide von dem einen Schenkel AB = α und von dem andern AD = β ab, ziehe durch die Endpunkte B und D Parallelen mit AD und AB, welche sich in C schneiden, so ist das entstandene Viereck ABCD ein Parallelogramm nach §. 103.

Anm. Man könnte auch, statt durch B und D Parallelen mit AD und AB zu ziehen, um B und D mit β und α Kreise beschreiben und den erhaltenen Durchschnittspunkt C mit B und D verbinden; das so erhaltene Viereck ABCD ist nach §. 108 ebenfalls das richtige Parallelogramm. — Diese letzte Auflösung ist in praktischer Hinsicht meist vorzuziehen.

§. 119. Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie AB (Fig. 70) in eine vorgeschriebene Anzahl, z. B. in fünf gleiche Theile zu theilen.

(Die Analysis ist in §. 117 enthalten.)

Aufl. Man ziehe durch den einen Endpunkt A unter einem beliebigen Winkel eine Linie AZ, trage auf diese von A aus fünf beliebige, aber gleiche Stücke AC = CD = DE = EF = FG auf, verbinde G mit B und ziehe durch die Punkte C, D, E, F Parallelen mit BG, welche AB in H, K, L, M schneiden, so ist nach §. 117 AB in diesen Punkten in fünf gleiche Theile getheilt.

§. 120. Aufgabe.

Zwischen den Schenkeln eines Winkels BAC (Fig. 71) eine Linie von vorgeschriebener Länge (α) so zu ziehen, daß ihre

Endpunkte auf die Schenkel des Winkels BAC fallen, und sie mit dem einen Schenkel AC einen gegebenen Winkel (β) bildet.

Aufl. Man wähle in AC einen beliebigen Punkt D, lege in diesem den gegebenen Winkel β an, so daß ein Schenkel auf AD fällt, und schneide von dem andern Schenkel DE = α ab, ziehe durch E mit AC eine Parallele, welche AB in F schneidet, und durch F mit DE eine Parallele FG, so ist dieses die verlangte Linie.

Beweis. Denn erstens fallen beide Endpunkte F und G auf die Schenkel des gegebenen Winkels BAC; zweitens ist FG = DE, als gegenüberstehende Seiten im Parallelogramm DEFG, und DE = α gemacht, also auch FG = α; drittens ist Winkel FGA = EDG, weil FG || DE ist, und da EDG = β gemacht ist, folglich auch FGA = β.

Anm. Wenn statt zweier sich schneidenden Linien AB und AC zwei parallele Linien gegeben wären, so würde die Aufgabe (im Allgemeinen) unmöglich sein.

Uebungsaufgaben.

A. Vierecksaufgaben.

Aufgabe 53 — 55. Ein Parallelogramm zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

53) zwei Seiten und eine Diagonale;

54) beide Diagonalen und eine Seite;

55) eine Seite, ein Winkel und eine Diagonale (zwei Auflösungen).

Aufgabe 56 — 57. Ein Quadrat zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

56) die Summe aus der Seite und Diagonale;

57) der Unterschied zwischen der Diagonale und der Seite.

Aufgabe 58 — 59. Ein Rechteck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

58) die Diagonale und die Summe zweier zusammenstoßenden Seiten;

59) eine Seite und der Unterschied zwischen der Diagonale und der andern Seite.

Aufgabe 60 — 62. Einen Rhombus zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

60) ein Winkel und eine Diagonale;

61) ein Winkel und die Summe aus einer Seite und einer Diagonale;

62) ein Winkel und der Unterschied zwischen einer Seite und einer Diagonale.

Aufgabe 63 — 81. Ein Trapez (Fig. 63) zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

63) die beiden parallelen Seiten (a und c) und die Winkel an einer derselben (A und B);

64) eine der beiden parallelen Seiten (a), die ihr anliegenden Winkel (A und B) und eine der nicht parallelen Seiten (b);

65) die beiden parallelen Seiten (a und c), eine der nicht parallelen Seiten (b) und ein dieser anliegender Winkel (B);

66) die beiden parallelen Seiten (a und c), eine der beiden nicht parallelen Seiten (b) und ein dieser nicht anliegender Winkel (A) (zwei Auflösungen*);

67) die beiden nicht parallelen Seiten (b und d), eine der parallelen Seiten (a) und ein Winkel (A) (zwei Auflösungen);

---

*) Das heißt, daß unter gewissen Bedingungen zwei verschiedene Trapeze existiren können, welche beide die gegebenen Stücke enthalten.

68) alle vier Seiten (a, b, c und d);

69) die Summe der beiden parallelen Seiten (a + c); zwei Winkel an einer parallelen Seite (A und B) und eine der nicht parallelen Seiten (d);

70) die Summe der beiden parallelen Seiten (a + c); ein Winkel (A) und die beiden nicht parallelen Seiten (b und d) (zwei Auflösungen);

71) eine Diagonale (e), die beiden parallelen Seiten (a und c) und eine der nicht parallelen Seiten (b);

72) eine Diagonale (e), die beiden nicht parallelen Seiten (b und d) und eine der parallelen Seiten (a) (zwei Auflösungen);

73) eine Diagonale (e), zwei Winkel an einer parallelen Seite (A und B) und eine der nicht parallelen Seiten (b) (zwei Auflösungen);

74) eine Diagonale (e), eine der parallelen Seiten (a) und die anliegenden Winkel (A und B) (zwei Auflösungen);

75) eine Diagonale (e), zwei Winkel an einer parallelen Seite (A und B) und der Unterschied der beiden parallelen Seiten (a — c) (zwei Auflösungen);

76) eine Diagonale (e), die beiden nicht parallelen Seiten (b und d) und der Unterschied der beiden parallelen Seiten (a — c) (zwei Auflösungen);

77) zwei zusammenstoßende Seiten (a und b), der eingeschlossene Winkel (B) und der Winkel, welchen die Diagonalen einschließen;

78) die beiden Diagonalen (e und f) und die beiden parallelen Seiten (a und c);

79) die beiden Diagonalen (e und f), der Winkel, welchen sie einschließen, und eine der parallelen Seiten (a);

80) die beiden Diagonalen (e und f), der Winkel, welchen sie einschließen, und eine der nicht parallelen Seiten (b) (zwei Auflösungen);

81) die beiden Diagonalen (e und f), der Winkel, welchen sie einschließen, und ein Winkel des Trapezes (A).

Aufgabe 82 — 98 (Fig. 72). Ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

82) alle Seiten (a, b, c, d) und ein Winkel (A) (zwei Auflösungen);

83) drei Seiten (a, b, d) und die eingeschlossenen Winkel (A und B);

84) drei Seiten (a, b, d) und zwei einander gegenüberliegende Winkel (A und C) (zwei Auflösungen *);

85) drei Seiten (a, b, d) und die beiden Winkel (A und D), welche an einer der nicht eingeschlossenen Seiten liegen (zwei Auflösungen);

86) zwei zusammenstoßende Seiten (a und b) und drei Winkel (A, B und C);

87) zwei gegenüberliegende Seiten (a und c) und drei Winkel (A, B und C);

*87) alle vier Seiten und die Summe zweier an einer Seite liegenden Winkel;

88) eine Diagonale (e) und alle vier Seiten (a, b, c u. d) (zwei Auflösungen);

89) eine Diagonale (e), drei Seiten (a, b und c) und ein von der Diagonale getheilter, von den gegebenen Seiten nicht eingeschlossener Winkel (A, — zwei Auflös.);

90) drei Seiten (a, b und c), ein nicht eingeschlossener Winkel (D) und die gegenüberliegende Diagonale (e) (vier Auflösungen);

91) zwei zusammenstoßende Seiten (a und b), die verbindende Diagonale (e) und zwei Winkel (A und D), welche an einer nicht gegebenen Seite liegen;

92) eine Diagonale (e), zwei mit derselben in eine Ecke zusammenstoßende Seiten (a und d) und zwei Winkel (B und C), welche an einer nicht gegebenen Seite liegen (vier Auflösungen);

*) Diese Aufgabe wird leichter mit Anwendung der Sätze vom Kreise gelöst.

93) eine Diagonale (e), zwei sich gegenüberliegende Seiten (a und c) und die der einen dieser Seiten anliegenden Winkel (A und B) (vier Auflösungen);

94) die beiden Diagonalen (e und f) und drei Seiten (a, b, c) (zwei Auflös.);

95) die beiden Diagonalen (e und f), zwei zusammenstoßende Seiten (a und b) und der einer anliegende Winkel (A) (zwei Auflösungen);

96) die beiden Diagonalen (e und f), eine Seite (a) und die anliegenden Winkel (A und B) (vier Auflösungen);

97) die beiden Diagonalen (e und f), der von denselben eingeschlossene Winkel und zwei zusammenstoßende Seiten (a und b);

98) die beiden Diagonalen (e und f), der eingeschlossene Winkel und zwei gegenüberliegende Seiten (a und c) (zwei Auflösungen *).

Anm. Diese Aufgaben lassen sich noch um ein Bedeutendes vermehren, wenn man die Winkel, welche die Diagonalen mit den Seiten des Vierecks bilden, unter die gegebenen Stücke aufnimmt.

B. Dreiecksaufgaben.

Aufgabe 99 — 105. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

99) der Winkel an der Spitze und die aus den Endpunkten der Grundlinie auf die Seiten gefällten Lothe;

100 und 101) die aus den Endpunkten der Grundlinie auf die Seiten gefällten Lothe und die Summe oder der Unterschied der beiden Seiten (zwei Auflösungen);

102 und 103) die beiden Seiten und die Summe oder der Unterschied der auf die Seiten aus den Endpunkten der Grundlinie gefällten Lothe (zwei Auflösungen);

104 und 105) die beiden Winkel an der Grundlinie und die Summe oder der Unterschied der aus den Endpunkten der Grundlinie auf die Seiten gefällten Lothe.

Aufgabe 105, a — d. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

105, a und b) die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und die Summe oder der Unterschied der aus den Endpunkten der Grundlinie auf die Seiten gefällten Lothe;

105, c) die Grundlinie, die Summe der Seiten und die Summe der Lothe (zwei Auflösungen);

105, d) die Grundlinie, der Unterschied der Seiten und der Unterschied der Lothe.

Aufgabe 106 — 109. Wenn man die Linie, welche die Spitze eines Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie verbindet, und die der Kürze wegen den Namen Mittellinie erhalten soll, unter die gegebenen Stücke aufnimmt, so lassen sich weiter folgende Aufgaben aufstellen:

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

106) die beiden Seiten und die Mittellinie;

107) die Mittellinie, der Winkel an der Spitze und eine Seite (zwei Auflös.);

108) die Mittellinie, eine Seite und der Winkel, welchen die Mittellinie mit der andern Seite bildet (zwei Auflösungen);

109) die Mittellinie und die Winkel, welche sie mit den beiden Seiten bildet.

C. Vermischte Aufgaben.

Aufgabe 110 — 111. Es sind zwei parallele Linien und außerhalb derselben ist ein Punkt P gegeben; man soll durch diesen Punkt eine Linie, welche die Parallelen in den Punkten X und Y schneidet, so ziehen, daß

110) XY einer gegebenen Linie gleich wird;

111) PX + PY einer gegebenen Linie gleich wird.

---

*) Vergl. die Aufgaben 169 — 171.

Aufgabe 112 — 115. Es sind zwei parallele Linien und auf denselben die Punkte A und B gegeben; ferner ist noch in derselben Ebene (aber nicht auf den Parallelen) ein Punkt P gegeben; es soll durch diesen Punkt eine Linie, welche die beiden Parallelen in den Punkten X und Y schneidet, jedoch ohne die Verbindungslinie von A und B zu schneiden, so gezogen werden, daß

112) $AX = BY$ wird;

113) AX doppelt so groß als BY wird;

114) $AX + BY$ einer gegebenen Linie gleich wird;

115) $AX - BY$ einer gegebenen Linie gleich wird.

Aufgabe 116 — 119. Dieselben Aufgaben, jedoch mit der Bedingung, daß die gesuchte Linie AB durchschneidet.

Bemerkung. So wie wir über das Viereck weniger Sätze, als über das Dreieck aufgestellt haben, weil sich das Viereck allemal durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerschneiden läßt, so übergehen wir aus gleichen Gründen die besondere Betrachtung des Fünfecks, Sechsecks u. s. w. gänzlich, zumal die Sätze über die einzelnen Vielecke um so verwickelter werden, je mehr die Zahl ihrer Seiten wächst. Von einer besonders merkwürdigen Art der Vielecke, den regelmäßigen, wird am zweckmäßigsten in dem folgenden Abschnitte (vom Kreise) gehandelt.

Sechster Abschnitt.

Vom Kreise *).

A. Der Kreis und die gerade Linie.

1. Die Sehne.

*§. 121. Lehrsatz.

Eine (gerade) Linie AB (Fig. 73), welche zwei Punkte des Kreises verbindet, liegt ganz innerhalb, ihre Verlängerungen BD und AE aber liegen ganz außerhalb des Kreises.

Beweis. Wenn ich aus dem Mittelpunkte C auf AB das Loth CF fälle, ferner auf AB einen beliebigen Punkt G und auf BD einen Punkt H annehme und C mit A, B, G und H verbinde, so ist nach §. 83 $CG < CB$, aber $CH > CB$. Demnach liegt der Punkt G innerhalb, der Punkt H aber außerhalb des Kreises, weil des ersteren Abstand vom Mittelpunkte kleiner, des letzteren Abstand vom Mittelpunkte aber größer ist, als der Radius CB. — Auf gleiche Weise läßt sich zeigen, daß auch alle anderen Punkte auf der Linie AB innerhalb und alle Punkte der Verlängerungen außerhalb des Kreises liegen.

Anm. 1. Das Loth aus C auf AB gefällt kann nicht auf die Verlängerung der Linie AB treffen, da ABC ein gleichschenkliges Dreieck ist.

---

*) Der Anfänger wird wohl thun, ehe er zu diesem Abschnitte übergeht, die §§. 8 — 16 und §§. 33 — 35 zu wiederholen.

Anm. 2. Eigentlich müssen bei dem vorhergehenden Satze zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem AB durch den Mittelpunkt geht oder nicht. Der Beweis ist nur für den letzten Fall geführt, indem für den ersten Fall die Richtigkeit des Satzes sich noch viel leichter ergiebt.

Bemerkung. Die Beweise für die Sätze vom Kreise werden dadurch erhalten, daß man die betreffenden Punkte mit dem Mittelpunkte verbindet und hierdurch die zu erweisenden Behauptungen auf Dreieckssätze zurückführt.

§. 122. Lehrsatz.

Der Durchmesser AB (Fig. 74) ist größer, als jede andere Sehne DE, (welche nicht durch den Mittelpunkt geht).

Beweis. Ich ziehe die Radien CD und CE, so entsteht ein Dreieck CDE. In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer, als die dritte, also ist $CD + CE > DE$.

Statt CD kann ich CA und statt CE kann ich CB setzen; folglich ist

$$CA + CB \text{ d. h. } AB > DE.$$

§. 123. Lehrsatz.

1) Wenn ich eine Sehne AB (Fig. 75) halbire und den Halbirungspunkt D mit dem Mittelpunkte C verbinde, so ist die Verbindungslinie CD auf der Sehne AB senkrecht.

2) Ein Loth CD, aus dem Mittelpunkte C auf die Sehne AB gefällt, halbirt diese, so wie auch den Centriwinkel ACB und den zugehörigen Bogen AEB.

3) Ein Loth auf der Sehne AB im Halbirungspunkte D errichtet, geht durch den Mittelpunkt C.

Die Beweise dieser Sätze sind, wenn man sich den Mittelpunkt C mit den Endpunkten der Sehne verbunden denkt, bereits in §. 85 geführt worden.

Anm. Man kann den letzten der eben erwiesenen Sätze benutzen, um von einem gegebenen Kreise den Mittelpunkt zu finden, wenn dieser nicht mit gegeben sein sollte. Zieht man nehmlich eine willkührliche Sehne AB (Fig. 75), halbirt dieselbe in D und zieht durch D senkrecht auf AB eine Linie, welche den Kreis in E und F schneidet, so ist EF ein Durchmesser, und man erhält daher den gesuchten Mittelpunkt, wenn man EF in C halbirt. — Auch dieses ist leicht zu zeigen: Ein auf der Sehne AB in dem Halbirungspunkte D errichtetes Loth halbirt in den Punkten E und F auch die zu der Sehne gehörigen Bogen AEB und AFB.

§. 124. Lehrsatz.

1) Gleiche Sehnen haben gleichen Abstand vom Mittelpunkte.

2) Die größere Sehne hat einen kleineren Abstand vom Mittelpunkte.

Beweis. 1) Die gleichen Sehnen seien AB und DE (Fig. 76), und aus dem Mittelpunkte C seien auf dieselben die Lothe CF und CG gefällt. Um nun die Gleichheit dieser Lothe zu erweisen, ziehe ich die Radien CB und CD; dann entstehen die rechtwinkligen Dreiecke CFB und CGD, welche congruent sind, weil sie in der Hypotenuse und einer Cathete übereinstimmen,

nehmlich Hypotenuse CB = CD, als Radien,
und Cathete BF = DG, als Hälften der gleichen Sehnen AB und ED,

folglich △ CFB ≌ CGD nach §. 81
und daher auch Seite CF = CG.

2) Wenn aber Sehne AB > DE (Fig. 77) ist, so ist das Loth CF < CG. Denn wenn ich CB und CD ziehe, so entstehen wieder zwei rechtwinklige Dreiecke CFB und CGD; in diesen ist

Hypotenuse CB = CD,
aber Cathete BF > DG, weil Sehne AB > DE vorausgesetzt ist,

folglich Cathete CF < CG nach §. 82.

§. 125. Zusatz.

Es folgt aber auch weiter hieraus leicht indirect oder läßt sich eben so, wie §. 124 erweisen, daß

1) zwei Sehnen einander gleich sind, wenn sie gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, und daß

2) bei ungleichen Abständen vom Mittelpunkte diejenige Sehne die größere ist, welche den kleineren Abstand vom Mittelpunkte hat.

Bemerkung. Wenn man in einem Kreise eine beliebige Sehne AB (Fig. 75) zieht, so theilen die Endpunkte derselben den Kreis im Allgemeinen in zwei ungleiche Bogen, von denen der eine AFB größer, der andere AEB kleiner, als ein Halbkreis ist. Es gehören also zu derselben Sehne zwei verschiedene Bogen, während vermöge §. 4 zu jedem Bogen immer nur eine Sehne gehören kann. Um nun Zweideutigkeiten vorzubeugen, wollen wir im Folgenden, wenn von dem zu einer Sehne AB gehörigen Bogen die Rede ist, allemal den kleinen Bogen AEB verstehen, wenn nicht ausdrücklich gesagt ist, daß der größere Bogen AFB gemeint sein soll.

§. 126. Lehrsatz.

1) Gleiche Sehnen haben gleiche Bogen (in demselben Kreise oder in Kreisen, welche mit gleichen Radien beschrieben sind).

2) Zur größeren Sehne gehört auch ein größerer Bogen.

Beweis. 1) Wenn die Sehne AB = DE (Fig. 78) vorausgesetzt ist und ich die Radien AC, BC, DG und EG ziehe, so entstehen zwei Dreiecke ABC und DEG, welche congruent sind, weil sie in den drei Seiten übereinstimmen, nehmlich

AC = DG } als Radien,
BC = EG }
AB = DE vorausgesetzt,

folglich △ ABC ≌ DEG,
daher Winkel C = G
und also auch, da zu gleichen Centriwinkeln gleiche Bogen gehören,
Bogen AB = DE.

2) Wenn aber Sehne AB > DE (Fig. 79) vorausgesetzt ist, so muß auch Bogen AB > DE sein. Denn wenn ich wieder die Radien AC, BC, DG und EG ziehe, so ist in den entstandenen Dreiecken ABC und DEG

$$\left.\begin{array}{l} AC = DG \\ BC = EG \end{array}\right\}$$ als Radien,

aber $AB > DE$ vorausgesetzt,

folglich Winkel $C > G$

nach dem Satze: Sind in zwei Dreiecken je zwei Seiten gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so liegt der größeren Seite auch ein größerer Winkel gegenüber. Da nun Centriwinkel $C > G$ erwiesen ist, so ist auch Bogen $AB > DE$.

§. 127. Lehrsatz.

1) Zu gleichen Bogen gehören auch gleiche Sehnen und

2) Zum größeren Bogen gehört eine größere Sehne.

Beweis. 1) Wenn der Bogen $AB = DE$ (Fig. 78) gegeben ist, so muß auch die Sehne $AB = DE$ sein; denn wenn ich die Radien AC, BC, DG und EG ziehe, so entstehen zwei Dreiecke ABC und DEG, welche congruent sind, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, nehmlich

$$\left.\begin{array}{l} AC = DG \\ BC = EG \end{array}\right\}$$ als Radien,

Winkel $C = G$, weil Bogen $AB = DE$ vorausges. ist,

folglich $\triangle\, ABC \cong DEG$

und daher auch $AB = DE$.

2) Wenn aber Bogen $AB > DE$ (Fig. 79) gegeben ist, so ist in den Dreiecken ABC und DEG

$$\left.\begin{array}{l} AC = DG \\ BC = EG \end{array}\right\}$$ und als Radien,

aber Winkel $C > G$, weil Bogen $AB > DE$ vorausges. ist,

folglich Seite $AB > DE$

nach dem Satze: Sind in zwei Dreiecken je zwei Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so liegt dem größeren Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

2. Die Tangente und Sekante.

§. 128. Lehrsatz.

1) Eine Linie, welche auf dem Radius in seinem Endpunkte senkrecht steht, ist eine Tangente.

2) Eine Linie dagegen, welche, durch den Endpunkt des Radius gezogen, mit demselben schiefe Winkel bildet, schneidet den Kreis.

Beweis. 1) Wenn die Linie AD (Fig. 80) auf dem Radius BC in seinem Endpunkte B senkrecht steht und ich nehme auf dieser Linie einen willkührlichen Punkt E an und verbinde denselben mit dem Mittelpunkte C, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck CBE, weil Winkel ABC nach der Voraussetzung ein rechter ist. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist aber die Hypotenuse größer, als jede Cathete, also $CE > CB$; und da CB ein Radius ist, so liegt folglich der Punkt E außerhalb des Kreises. Dasselbe kann eben so von jedem andern Punkte der Linie AD erwiesen werden (mit Ausnahme des Punktes B, welcher auf dem Kreise liegt). Demnach ist AD eine Tangente.

2) Wenn aber die Linie AD (Fig. 81) mit dem Radius BC schiefe Winkel bildet, z. B. Winkel $ABC <$ und Winkel $DBC > 90^0$ ist, so muß

die Linie AB den Kreis schneiden. Um dieses darzuthun, brauche ich vermöge §. 15 nur zu zeigen, daß AB einen Punkt innerhalb des Kreises hat. Einen solchen finde ich, wenn ich vom Mittelpunkte C ein Loth CE auf AD fälle. Dann entsteht ein rechtwinkliges Dreieck BEC, in welchem die Cathete CE kleiner, als die Hypotenuse BC ist. Demnach liegt der Punkt E innerhalb des Kreises, weil sein Abstand vom Mittelpunkte kleiner ist, als der Radius, und folglich schneidet AB den Kreis, weil sie einen Punkt innerhalb desselben hat.

§. 129. Zusatz.

1) Der Radius BC, welcher den Berührungspunkt B mit dem Mittelpunkte C verbindet, ist auf der Tangente AD senkrecht (Fig. 82).

2) Ein Loth BE, auf der Tangente AD im Berührungspunkte B errichtet, geht durch den Mittelpunkt.

Beweis. 1) Wenn die Linie AD mit dem Radius BC schiefe Winkel bildete, so müßte sie nach (2) des vorhergehenden §. den Kreis schneiden und könnte folglich keine Tangente sein.

2) Wenn der Mittelpunkt nicht in dem Lothe BE, sondern außerhalb desselben in G läge, und ich ziehe GB, so wäre diese Linie ein Radius und müßte folglich nach Nro. 1 auf der Tangente AD senkrecht sein, welches nicht möglich ist, da schon BE $\perp$ AD gegeben ist. Demnach kann der Mittelpunkt nicht außerhalb BE, sondern er muß auf BE liegen.

Bemerkung. Durch einen Punkt auf dem Kreise kann ich zu Folge des vorhergehenden §. nur eine Tangente ziehen. Da ich aber auf einem Kreise unzählige Punkte annehmen kann, so lassen sich auch an jeden Kreis unzählige Tangenten ziehen. Ziehe ich nun an einen Kreis zwei Tangenten AB und AD (Fig. 83), welche sich in A schneiden, so gelange ich leicht zu dem folgenden Satze.

§. 130. Zusatz.

1) Wenn aus einem Punkte A (Fig. 83) außerhalb des Kreises zwei Tangenten AB und AD gezogen sind, so sind dieselben gleich lang, und die Linie AC, welche den gemeinschaftlichen Punkt A mit dem Mittelpunkte C verbindet, halbirt den Winkel BAD, welchen die Tangenten einschließen.

2) Eine Linie, welche den Winkel halbirt, welchen zwei von einem Punkte aus an den Kreis gezogenen Tangenten einschließen, geht durch den Mittelpunkt.

Beweis. 1) Wenn ich die Radien BC und CD ziehe, so sind die entstandenen Dreiecke ABC und ADC zunächst rechtwinklig, weil nach §. 129, 1 der Radius allemal auf der Tangente senkrecht steht, und zweitens congruent, weil sie in der Hypotenuse und einer Cathete übereinstimmen, nehmlich

Hypotenuse AC = AC
und Cathete BC = CD, als Radien,

folglich $\triangle$ ABC $\cong$ ADC,
daher auch AB = AD
und Winkel BAC = DAC,
also Winkel BAD durch AC halbirt.

(2) folgt leicht indirect aus (1).

§. 131. Lehrsatz.

Eine gerade Linie und ein Kreis können in einer Ebene eine dreifache Lage gegen einander haben.

1) Die gerade Linie AD (Fig. 81) schneidet den Kreis, wenn ihr Abstand CE vom Mittelpunkte C kleiner ist, als der Radius (nach §. 15).

2) Die gerade Linie AD (Fig. 82) berührt den Kreis, wenn ihr Abstand BC vom Mittelpunkte C gleich dem Radius ist (nach §. 128, 1). Endlich

3) Die gerade Linie AD (Fig. 84) liegt ganz außerhalb des Kreises und trifft in keinem Punkte mit demselben zusammen, wenn ihr Abstand BC vom Mittelpunkte C größer ist, als der Radius.

Denn zunächst muß der Punkt B außerhalb des Kreises liegen, weil BC größer, als der Radius vorausgesetzt ist; und dasselbe muß um so mehr von jedem beliebigen andern Punkte E auf der Linie AB gelten, da nach §. 83 CE noch $>$ BC ist.

Anm. Dieser Satz bildet eine Analogie zu §. 10.

*§. 132. Lehrsatz.

Wenn ein Punkt B (Fig. 96 und 100) außerhalb oder innerhalb eines (um den Mittelpunkt A beschriebenen) Kreises liegt und man verbindet denselben mit verschiedenen Punkten des Kreises durch gerade Linien, so ist diejenige Linie BC am kleinsten, welche verlängert durch den Mittelpunkt A geht, und diejenige BE am größten, in welcher der Mittelpunkt A liegt; die übrigen Verbindungslinien BF, BG ... aber werden um so größer, je größer der zwischen denselben und der kleinsten Linie liegende Bogen CF, CG ... ist.

Beweis. In Fig. 96 ist $BC + AC < BF + AF$ nach §. 62, folglich da $AC = AF$ ist, $BC < BF$; und in Fig. 100 ist $BC + AB = AC = AF$, aber $AF < AB + BF$, folglich $BC + AB < AB + BF$, also $BC < BF$. Ferner ist in Fig. 96 und Fig. 100 in den Dreiecken FAB und GAB

$$AB = AB,$$
$$AF = AG,$$

aber Winkel $FAB < GAB$,

daher nach §. 74 $BF < BG$.

Endlich ist in Fig. 96 und Fig. 100 $BE = AB + AE = AB + AG > BG$, also $BE > BG$.

Anm. Aus diesem Satze folgt auch noch, daß ein Punkt, welcher nicht der Mittelpunkt ist, niemals von drei Punkten des Kreises gleichen Abstand haben kann.

3. Der Peripheriewinkel.

§. 133. Erklärung.

Ein Winkel (ADB, Fig. 85), dessen Scheitel auf der Peripherie liegt, und dessen Schenkel den Kreis durchschneiden, heißt ein Peripheriewinkel.

Der zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels (ADB) liegende Bogen (AB) heißt der zum Peripheriewinkel gehörige Bogen.

Bemerkung. Ueber demselben Bogen AB (Fig. 85) kann man nur einen Centriwinkel ACB, dagegen unzählige Peripheriewinkel zeichnen. Wir unterscheiden hierbei drei Hauptlagen. 1) Der Mittelpunkt C kann auf einem Schenkel AE des Peripheriewinkels AEB liegen. 2) Der Mittelpunkt C kann zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels ADB liegen, und 3) der Mittelpunkt C kann außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels AFB liegen. — In allen Fällen aber gilt der folgende merkwürdige Satz:

§. 134. Lehrsatz.

Der Centriwinkel ist doppelt so groß, als der Peripheriewinkel, welcher mit ihm auf demselben Bogen steht.

Beweis. Erster Fall. Wenn der Mittelpunkt C auf einem Schenkel des Peripheriewinkels AEB liegt (Fig. 86, a).

Der Centriwinkel ACB ist zugleich Außenwinkel des Dreiecks BCE und daher so groß, als die inneren gegenüberstehenden Winkel B und E zusammen. Die Winkel B und E sind aber gleich, weil in dem Dreiecke BCE die Seiten BC und CE gleich sind, als Radien. Folglich ist Winkel ACB doppelt so groß, als E allein.

Zweiter Fall. Wenn der Mittelpunkt C zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels ADB liegt (Fig. 86, b).

Um zu zeigen, daß der Centriwinkel ACB doppelt so groß ist, als der Peripheriewinkel ADB, ziehe ich durch D den Durchmesser DG. Nun ist der vorhergehende Fall zweimal entstanden, und nach Nro. 1

Centriwinkel ACG doppelt so groß, als Peripheriewinkel ADG
und Centriwinkel BCG " " " " Peripheriewinkel BDG,
folglich wenn ich addire:

Winkel ACG und BCG zusammen doppelt so groß, als ADG und BDG,
d. h. Winkel ACB doppelt so groß, als ADB.

Dritter Fall. Wenn der Mittelpunkt C außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels AFB liegt (Fig. 86, c).

Ich ziehe wieder durch F den Durchmesser FH und erhalte so den ersten Fall zweimal; nun ist nach Nro. 1

Centriwinkel HCB doppelt so groß, als Peripheriewinkel HFB
und Centriwinkel HCA " " " " Peripheriewinkel HFA,
folglich wenn ich subtrahire:

Winkel HCB weniger HCA doppelt so groß, als HFB weniger HFA,
d. h. Winkel ACB doppelt so groß, als AFB.

§. 135. Zusatz.

1) Alle Peripheriewinkel auf gleichen Bogen sind gleich, weil sie die Hälften gleicher Centriwinkel sind.

2) Zum größeren Bogen gehört auch ein größerer Peripheriewinkel, weil zum größeren Bogen ein größerer Centriwinkel gehört, und der Peripheriewinkel die Hälfte des Centriwinkels ist, der mit ihm auf gleichem Bogen steht.

3) Zu gleichen Peripheriewinkeln gehören auch gleiche Bogen und zum größeren Peripheriewinkel gehört auch ein größerer Bogen.

4) Alle Peripheriewinkel, welche in demselben Kreisabschnitte liegen, sind gleich, weil sie auf demselben Bogen stehen.

5) Der Peripheriewinkel ADB im Halbkreise ist ein rechter, weil sein Centriwinkel ACB ein flacher ist (Fig. 97*).

6) Der Peripheriewinkel, welcher auf einem Bogen steht, welcher kleiner, als die halbe Peripherie ist, ist kleiner, als ein rechter, also ein spitzer, weil sein Centriwinkel kleiner, als ein flacher ist.

7) Der Peripheriewinkel, welcher auf einem Bogen steht, der größer, als ein Halbkreis ist, ist größer, als ein rechter, also ein stumpfer, weil der zugehörige Centriwinkel ein erhabener ist.

8) Der Peripheriewinkel hat halb so viele Grade, als der zugehörige Bogen, weil der Bogen eben so viele Grade hat, als der Centriwinkel.

Anm. Für die so häufig Anwendung findende Behauptung (5) fügen wir noch den folgenden besondern Beweis hinzu. Wenn man den Mittelpunkt C (Fig. 97*) mit dem Scheitelpunkte D des auf dem Halbkreise AEB stehenden Peripheriewinkels ADB verbindet, so ist in den entstandenen gleichschenkligen Dreiecken ACD und BCD Winkel $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$. Nun ist aber

$$\alpha + \gamma + \delta + \beta = \pi,$$

weil in einem Dreiecke ADB alle Winkel zusammen einen Flachen ausmachen; folglich, da wir statt $\alpha + \gamma$ auch 2γ und statt $\beta + \delta$ auch 2δ setzen können,

$$2\gamma + 2\delta = \pi,$$

also

$$\gamma + \delta = {}^1/_2\pi = 90^0.$$

§. 136. Zusatz.

1) Wenn zwei Sehnen AB und CD (Fig. 87) parallel laufen, so sind die zwischen ihnen liegenden Bogen AC und BD gleich.

Denn wenn ich BC ziehe, so ist Winkel B = C, als Wechselwinkel zwischen den parallelen AB und CD, und folglich auch Bogen AC = BD, weil zu gleichen Peripheriewinkeln auch gleiche Bogen gehören (nach Nro. 3 des vorhergehenden §.).

2) Umgekehrt: Zwei Sehnen AB und CD, welche von einem Kreise gleiche Bogen AC und BD abschneiden, sind parallel.

Denn wenn ich wieder BC ziehe, so ist Winkel B = C, weil Bogen AC = BD gegeben ist; folglich ist auch AB || CD, weil ein Paar Wechselwinkel B und C gleich sind.

Anm. 1. Aus dem vorstehenden §. ergiebt sich leicht die Richtigkeit der folgenden Sätze:

1) Jedes in den Kreis gezeichnete Trapez ist ein Antiparallelogramm, (d. h. die nicht parallelen Seiten sind einander gleich), und

2) jedes in den Kreis gezeichnete Parallelogramm ist ein Rechteck.

Anm. 2. Auch die folgenden Sätze sind nicht schwer zu erweisen:

1) Wenn in einem Kreise eine Sehne einer an denselben gezogenen Tangente parallel ist, so halbirt der Berührungspunkt den zwischen der Sehne und Tangente liegenden Bogen.

2) Unter allen Sehnen, welche durch einen innerhalb eines Kreises liegenden Punkt gehen, ist diejenige, welche auf dem durch diesen Punkt gezogenen Durchmesser senkrecht steht, am kleinsten; und die Sehnen werden um so größer, je kleiner der (spitze) Winkel ist, welchen sie mit diesem Durchmesser bilden.

Bemerkung. Wenn man durch den Berührungspunkt A (Fig. 88, a und b) einer Tangente DE eine willkührliche Sehne AB zieht, so entstehen zwei Kreisabschnitte, von denen der eine ABF den Mittelpunkt enthält, der andere ABG nicht *), und zwei Nebenwinkel BAD und BAE, von denen Winkel BAD dem Abschnitte ABF und Winkel BAE dem Abschnitte BAG gegenüberliegt. Zwischen diesen Winkeln und Kreisabschnitten findet die merkwürdige Beziehung des folgenden Satzes statt.

§. 137. Lehrsatz.

Der Winkel, welchen die Sehne (AB) mit der Tangente (DE) bildet, ist dem Winkel im entgegengesetzten Abschnitte gleich.

Beweis. 1) Für den Abschnitt, in welchem der Mittelpunkt liegt (Fig. 88, a). — Um zu zeigen, daß der Winkel α gleich ist einem Peripheriewinkel im entgegengesetzten Abschnitte ABF, zeichne ich den für den Beweis am meisten geeigneten Peripheriewinkel γ, indem ich durch den Berührungspunkt A den Durchmesser AF ziehe und F mit B verbinde. — Der Winkel ABF ist ein rechter, als Winkel im Halbkreise, folglich bleibt für β und γ zusammen noch ein rechter übrig. Die Winkel α und β betragen ebenfalls zusammen einen rechten, weil die Tangente DE nach §. 129, 1 auf dem Radius AC senkrecht steht. Da nun β und γ einen rechten ausmachen und α und β auch, so muß folglich $\gamma = \alpha$ sein. — Dasselbe gilt auch von jedem andern in den Abschnitt AFB zu zeichnenden Winkel, weil alle Peripheriewinkel in demselben Kreisabschnitte gleich sind (§. 135, 4).

2) Für den Abschnitt, in welchem der Mittelpunkt nicht liegt (Fig. 88, b). — Um zu zeigen, daß der Winkel EAB = AGB ist, ziehe ich wieder einen Durchmesser AF durch den Berührungspunkt A und verbinde F mit G. Dann ist Winkel α ein rechter, weil die Tangente auf dem Durchmesser senkrecht steht; und Winkel γ ist ein rechter, als Winkel im Halbkreise; also ist $\alpha = \gamma$. Ferner ist Winkel $\beta = \delta$, als Peripheriewinkel auf dem nehmlichen Bogen BF. Da nun Winkel $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$ erwiesen ist, so ist folglich auch der ganze Winkel EAB = AGB, w. z. e. w.

Anm. Wenn die Sehne durch den Mittelpunkt geht, so bedarf es keines besonderen Beweises für die Richtigkeit unseres Satzes, weil schon in den §§. 129 und 135 erwiesen ist, daß sowohl der Winkel, welchen die Tangente und ein Durchmesser einschließen, als auch der Winkel, welcher im Halbkreise liegt, ein rechter ist.

4. Vielecke in und um den Kreis.

§. 138. Erklärung.

Ein Vieleck (ABDE, Fig. 91) heißt in den Kreis beschrieben, wenn seine Seiten Sehnen sind, und ein Vieleck (ABDE, Fig. 92) heißt um den Kreis beschrieben, wenn seine Seiten Tangenten sind.

§. 139. Zusatz.

Wenn ein Dreieck in einen Kreis beschrieben ist, so kann der Mittelpunkt des Kreises in Beziehung auf das Dreieck eine dreifache Lage haben. Er fällt nehmlich innerhalb des Dreiecks, wenn das Dreieck spitzwinklig ist;

*) Vorausgesetzt, daß AB nicht selbst durch den Mittelpunkt geht.

auf eine Seite, wenn es rechtwinklig, und außerhalb des Dreiecks, wenn es stumpfwinklig ist.

Die Beweise für diese Behauptungen sind in §. 135 enthalten.

§. 140. Lehrsatz.

Um jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Beweis. (Wenn ein Dreieck in einen Kreis beschrieben ist, so sind nach §. 138 die Seiten des Dreiecks Sehnen, und der Mittelpunkt muß folglich nach §. 123 in jedem der Lothe liegen, welche ich in den Mitten der Seiten errichte. Ich finde daher den Mittelpunkt durch folgendes Verfahren:) — Ich halbire zwei Seiten AB und BC des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 89) und errichte in den Halbirungspunkten D und E Lothe, welche sich nach §. 47 durchschneiden müssen. Der Durchschnittspunkt M ist der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC zu beschreibenden Kreises. — Denn wenn ich zunächst M mit A und B verbinde, so ist das entstandene Dreieck AMB nach §. 85, 5 gleichschenklig, weil die Grundlinie desselben AB zu Folge der Construction durch die Höhe DM halbirt ist; also ist AM = BM. Aus gleichen Gründen ist auch, wenn ich M mit C verbinde, CM = BM. — Da nun AM = BM = CM ist, so geht ein Kreis, welcher mit einer dieser Linien um den Punkt M beschrieben wird, durch die drei Ecken des gegebenen Dreiecks ABC.

§. 141. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden §. folgt unmittelbar, daß sich durch jede drei Punkte A, B und C, welche nicht in gerader Linie liegen, ein Kreis beschreiben läßt, und da der Mittelpunkt nach §. 123 sowohl in dem Lothe DM, als auch in dem Lothe EM liegen muß, also allein in dem Durchschnittspunkte M beider Lothe liegen kann, geht hieraus weiter hervor, daß sich durch drei Punkte nur ein einziger Kreis beschreiben läßt.

Anm. Ein Kreis ist also vollständig bestimmt, wenn von demselben drei Punkte gegeben sind. — Zwei Punkte A und B (Fig. 89) allein reichen für diesen Zweck nicht aus, da jeder Punkt des Lothes DM Mittelpunkt eines Kreises sein kann, welcher durch die Punkte A und B geht. Dagegen ist es nicht allemal möglich, durch vier Punkte A, B, D und E (Fig. 91) einen Kreis zu legen. (In §. 143 werden wir sehen, welche Bedingung erfüllt sein muß, damit sich wirklich durch vier Punkte ein Kreis beschreiben läßt.)

§. 142. Lehrsatz.

In jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Beweis. (Wenn ein Dreieck um einen Kreis beschrieben ist, so sind die Seiten desselben nach §. 138 Tangenten, und nach §. 130 liegt der Mittelpunkt allemal in der Halbirungslinie des Winkels, welchen zwei Tangenten einschließen. Ich finde daher den gesuchten Mittelpunkt auf folgende Weise:) — Ich halbire zwei Winkel A und B des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 90). — Der Punkt M, in welchem die Halbirungslinien sich schneiden, ist der Mittelpunkt des in das Dreieck zu beschreibenden Kreises. — Denn wenn ich aus M auf die Seiten des Dreiecks ABC die Lothe MD, ME und MF fälle, so ist zunächst Dreieck AMD ≅ AMF, weil sie in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, nehmlich

$$AM = AM,$$
Winkel $DAM = FAM$ gemacht,
Winkel $ADM = AFM$, als Rechte,

folglich $\triangle AMD \cong AMF$
und daher auch $MD = MF$.

Eben so wird erwiesen, daß
$$\triangle BMD \cong BME,$$
also auch $MD = ME$
ist. — Da nun $MD = MF = ME$ ist, so geht ein mit einer dieser Linien um den Punkt M beschriebener Kreis durch die drei Punkte D, E und F, und die Seiten des Dreiecks berühren in diesen Punkten den Kreis, (sind Tangenten,) weil sie zu Folge der Construction auf den Radien MD, ME und MF senkrecht stehen.

§. 143. Lehrsatz.

1) Wenn ein Viereck in einen Kreis beschrieben ist, so betragen je zwei gegenüberstehende Winkel einen Flachen; und

2) wenn ein Viereck um einen Kreis beschrieben ist, so sind die Summen der gegenüberstehenden Seiten einander gleich.

Beweis. 1) Um zu zeigen, daß in dem in den Kreis beschriebenen Vierecke ABDE (Fig. 91) zwei gegenüberstehende Winkel, z. B. A und D, einen Flachen betragen, verbinde ich die beiden anderen Ecken B und E mit dem Mittelpunkte. Der Peripheriewinkel A ist nun die Hälfte des (erhabenen) Centriwinkels α, und der Peripheriewinkel D ist die Hälfte des (hohlen) Centriwinkels δ. Die Winkel α und δ machen zusammen zwei Flache aus; folglich betragen A und D zusammen einen Flachen.

2) Das um den Kreis beschriebene Viereck sei ABDE (Fig. 92). In §. 130 haben wir gesehen, daß, wenn aus einem Punkte zwei Tangenten an einen Kreis gehen, dieselben einander gleich sind; folglich ist:

$$a = h,$$
$$b = c,$$
$$e = d$$
und $f = g$;

also wenn wir addiren:
$$a + b + e + f = h + c + d + g,$$
d. h. $AB + DE = BD + AE$.

Anm. Ueberhaupt läßt sich leicht zeigen, daß bei jedem in den Kreis beschriebenen Vielecke von gerader Seitenzahl die Summe aus dem ersten, dritten, fünften Winkel u. s. w. gleich ist der Summe aus dem zweiten, vierten, sechsten Winkel u. s. w.; — und bei jedem um den Kreis beschriebenen Vielecke von gerader Seitenzahl die Summe aus der ersten, dritten, fünften Seite u. s. w. gleich ist der Summe aus der zweiten, vierten, sechsten Seite u. s. w.

Ferner folgt aus dem vorhergehenden Lehrsatze, daß sich um ein Viereck nur dann ein Kreis beschreiben läßt, wenn die gegenüberstehenden Winkel zusammen einen Flachen ausmachen, und daß in ein Viereck ein Kreis nur dann beschrieben werden kann, wenn die Summen der gegenüberstehenden Seiten gleich sind. Von den Parallelogrammen kann daher nur um das Rechteck und in den Rhombus ein Kreis beschrieben werden. Das Quadrat ist das einzige Parallelogramm, in und um welches sich ein Kreis beschreiben läßt.

§. 144. Erklärung.

Ein Vieleck, welches lauter gleiche Seiten und Winkel hat, wird regelmäßig genannt.

Unter den Dreiecken ist also das gleichseitige und unter den Vierecken das Quadrat regelmäßig.

§. 145. Lehrsatz.

Wenn man die Peripherie eines Kreises in eine beliebige Anzahl, z. B. in acht gleiche Theile theilt und die auf einander folgenden Theilungspunkte A, B, D . . . (Fig. 93) verbindet, so ist das entstandene Vieleck regelmäßig.

Beweis. Dasselbe hat zunächst gleiche Seiten; denn die Seiten AB, BD, DE . . . sind einander gleich als Sehnen gleicher Bogen. Ferner hat das Vieleck auch gleiche Winkel; denn dieselben sind Peripheriewinkel, welche auf gleichen Bogen stehen. So steht z. B. der Winkel KAB auf dem Bogen BDEFGHK und der Winkel ABD auf dem Bogen DEFGHKA, und diese Bogen sind einander gleich, weil sie aus gleich vielen und gleich gemachten Stücken bestehen; (jeder enthält $^6/_8$ der ganzen Peripherie). Dasselbe gilt eben so von den übrigen Winkeln D, E, F . . . Folglich ist das Vieleck regelmäßig.

§. 146. Zusatz.

Man erhält daher ein regelmäßiges Viereck, Quadrat im Kreise, wenn man zwei sich senkrecht schneidende Durchmesser zieht und ihre Endpunkte verbindet. Durch Halbirung der entstandenen Bogen läßt sich dann leicht weiter ein regelmäßiges Achteck, Sechszehneck u. s. w. in den Kreis zeichnen.

§. 147. Lehrsatz.

Die Seite des regelmäßigen Sechsecks im Kreise ist dem Radius gleich.

Beweis. Wenn wir die Endpunkte A und B (Fig. 94) einer Seite des Sechsecks im Kreise mit dem Mittelpunkte C verbinden, so hat der entstandene Centriwinkel γ 60^0, weil der Bogen AB der sechste Theil der Peripherie ist. Folglich bleiben für die beiden Winkel α und β zusammen noch 120^0 übrig, und da sie gleich sind, da AC und BC als Radien einander gleich sind, so kommen auf jeden 60^0. Demnach hat das Dreieck ABC lauter gleiche Winkel und folglich auch gleiche Seiten; also ist die Seite AB dem Radius AC gleich.

§. 148. Zusatz.

Zu Folge des vorstehenden Lehrsatzes läßt sich der Radius sechsmal als Sehne in den Kreis eintragen, wonach sich denn besonders leicht in den Kreis ein regelmäßiges Sechseck zeichnen läßt.

Durch Halbirung der Bogen erhält man dann leicht weiter ein regelmäßiges 12eck, 24eck u. s. w. Verbindet man dagegen in dem regelmäßigen Sechseck (Fig. 94) die erste, dritte und fünfte Ecke, A, D und F, mit einander, so erhält man ein regelmäßiges Dreieck im Kreise.

Anm. 1. Die Seite des regelmäßigen Dreiecks im Kreise wird auch erhalten, wenn man durch den Halbirungspunkt eines Radius eine senkrechte Sehne zieht; — ein leicht zu erweisender Satz.

Anm. 2. Zu Folge §. 146 und 148 können in den Kreis leicht das regelmäßige Dreieck und Viereck und diejenigen Vielecke, welche durch Verdoppelung der Seitenzahl aus diesen hervorgehen, gezeichnet werden. Weiter unten (§. 239 und 240) werden wir noch zeigen, wie sich in den Kreis das regelmäßige Fünfeck und Fünfzehneck zeichnen lassen.

§. 149. Lehrsatz.

In und um jedes regelmäßige Vieleck läßt sich aus dem nehmlichen Punkte ein Kreis beschreiben. — Dieser Punkt wird der Mittelpunkt des regelmäßigen Vielecks genannt.

Beweis. Um zunächst zu zeigen, daß sich um das regelmäßige Vieleck ABDEFGHK (Fig. 93) ein Kreis beschreiben läßt, legen wir durch drei auf einander folgende Ecken A, B, D nach §. 141 einen Kreis und beweisen dann, daß dieser Kreis auch durch alle übrigen Ecken E, F . . . gehen muß. Um dieses zuerst für die Ecke E darzuthun, verbinden wir A, B, D und E mit dem Mittelpunkte C. Dann lassen sich die Dreiecke ACB und DCE als congruent erweisen. Der ganze Winkel B ist = D nach der Voraussetzung, und der Winkel β ist = γ, weil BC = CD ist nach der Construction; folglich

ist auch	$\alpha = \delta$.
Ferner ist	AB = DE nach der Voraussetzung
und	BC = CD nach der Construction;
folglich	$\triangle$ ABC $\cong$ EDC,
also	CE = AC,

d. h. CE ist dem Radius des um C beschriebenen Kreises gleich. Folglich geht dieser Kreis auch durch E. — Eben so läßt sich zeigen, daß derselbe auch durch alle folgenden Ecken F, G . . . geht.

Zweitens läßt sich auch aus dem Punkte C ein Kreis in das Vieleck ABDEFGHK beschreiben. Denn da die Seiten desselben gleiche Sehnen des umschriebenen Kreises sind, so haben sie sämmtlich von dem Mittelpunkte C gleichen Abstand. Wenn wir daher aus C auf die Seiten Lothe fällen, so sind diese sämmtlich gleich lang, und folglich berührt ein mit einem dieser Lothe um C beschriebener Kreis nach §. 131, 2 die sämmtlichen Seiten des Vielecks ABDEFGHK, weil ihr Abstand vom Mittelpunkte dem Radius dieses Kreises gleich ist.

§. 150. Zusatz.

Wenn man die Ecken eines regelmäßigen Vielecks mit dem Mittelpunkte verbindet, so sind die entstandenen Dreiecke sämmtlich (aus Gleichheit dreier Seiten) congruent, und die Verbindungslinien halbiren folglich die Winkel des regelmäßigen Vielecks.

*§. 151. Lehrsatz.

Ein Vieleck ABDEFG (Fig. 95), in und um welches sich aus dem nehmlichen Punkte ein Kreis beschreiben läßt, ist regelmäßig.

Beweis. Da sich nach der Voraussetzung um das Vieleck ein Kreis beschreiben läßt, so sind die Seiten desselben Sehnen des umschriebenen Kreises, und da sich auch nach der Voraussetzung aus dem nehmlichen Mittelpunkte C in das Vieleck ein Kreis beschreiben läßt, so haben dieselben alle gleichen Abstand vom Mittelpunkte und sind folglich sämmtlich einander gleich. Daher sind auch die durch diese Sehnen von dem umschriebenen Kreise ab-

geschnittenen Bogen AB, BD, DE . . . einander gleich; folglich ist das Vieleck ABDEFG nach §. 145 regelmäßig.

*§. 152. Lehrsatz.

Wenn man die Peripherie eines Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilt und durch die Theilungspunkte H, K, L, M, N, O (Fig. 95) Tangenten zieht, so ist das entstandene Vieleck ABDEFG regelmäßig.

Beweis. Da zu Folge der Construction sich in das Vieleck ABDEFG ein Kreis beschreiben läßt, so haben wir vermöge des vorhergehenden §. nur noch nöthig zu zeigen, daß auch um dasselbe aus dem nehmlichen Mittelpunkte C ein Kreis beschrieben werden kann, d. h. daß sämmtliche Ecken vom Mittelpunkte C gleichen Abstand haben. Verbinden wir zunächst A und B mit C, so sind die entstandenen Dreiecke AHC und BHC congruent. Denn da nach der Voraussetzung Bogen OH = HK ist, so ist auch Winkel OCH = HCK. Nach §. 130 aber werden diese Winkel durch die Linien AC und BC halbirt; folglich ist auch die Hälfte

	ACH = BCH.
Ferner ist	AHC = BHC, als rechte Winkel,
und	CH = CH;
daher	$\triangle$ AHC $\cong$ BHC nach §. 71
und	AC = BC.

Eben so läßt sich zeigen, daß auch die übrigen Ecken D, E, F und G von dem Mittelpunkte C gleichen Abstand haben. Da sich nun sowohl um als in das Vieleck ABDEFG aus demselben Mittelpunkte C ein Kreis beschreiben läßt, so ist dasselbe zu Folge des vorhergehenden §. regelmäßig.

B. Zwei Kreise.

Bemerkung. Wenn man in einer Ebene zwei feste Punkte A und B (Fig. 97, 98 und 99) als Mittelpunkte zweier Kreise und außerdem noch einen dritten willkührlichen Punkt C annimmt und denselben mit A und B verbindet und hierauf mit AC und BC Kreise beschreibt, so wird man folgende Fälle zu unterscheiden haben: Der beiden Kreisen gemeinschaftliche Punkt C kann entweder auf der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte, Centrale, AB, oder auf der Verlängerung oder zur Seite derselben liegen. Diese Betrachtung führt zu dem folgenden Satze.

§. 153. Lehrsatz.

1) Wenn zwei Kreise einen Punkt C (Fig. 97) auf der Centrale AB gemeinschaftlich haben, so berühren sich die Kreise von Außen.

2) Wenn zwei Kreise einen Punkt C (Fig. 99) auf der Verlängerung der Centrale AB gemeinschaftlich haben, so berühren sich die Kreise von Innen.

3) Wenn zwei Kreise einen Punkt C (Fig. 98, a und b), welcher zur Seite der Centrale liegt, gemeinschaftlich haben, so haben die Kreise noch einen zweiten Punkt an der entgegengesetzten Seite der Centrale gemeinschaftlich und durchschneiden sich folglich.

Beweis. 1) Um zu zeigen, daß der um B beschriebene Kreis (Fig. 97) ganz außerhalb des um A beschriebenen Kreises liegt, nehme ich auf demselben einen beliebigen Punkt D an und verbinde denselben mit beiden Mittelpunkten A und B. In dem entstandenen Dreiecke ADB ist die Summe zweier Seiten größer, als die dritte; also

$$AD + BD > AC + BC$$

und daher, wenn ich das Gleiche BD und BC weglasse:

$$AD > AC.$$

Demnach liegt der Punkt D außerhalb des um A beschriebenen Kreises, weil sein Abstand AD vom Mittelpunkte A größer ist, als der Radius AC. Dasselbe gilt eben so von jedem andern Punkte des um B beschriebenen Kreises mit Ausnahme des Punktes C, welchen beide Kreise gemeinschaftlich haben.

2) Um zu zeigen, daß der um B beschriebene Kreis (Fig. 99) ganz innerhalb des um A beschriebenen Kreises liegt, nehme ich auf demselben einen willkührlichen Punkt D an und verbinde ihn mit beiden Mittelpunkten A und B. In dem entstandenen Dreiecke ABD ist

$$AB + BD > AD,$$

oder da ich statt BD auch BC setzen kann:

$$AB + BC \text{ d. h. } AC > AD.$$

Da nun AC ein Radius des Kreises um A ist, so liegt folglich der Punkt D innerhalb dieses Kreises. Das Nehmliche gilt von allen anderen Punkten des um B beschriebenen Kreises mit Ausnahme des beiden Kreisen gemeinschaftlichen Punktes C.

3) Wenn der gemeinschaftliche Punkt C zur Seite der Centrallinie AB liegt (Fig. 98, a und b), so haben die Kreise noch einen Punkt an der entgegengesetzten Seite der Centrallinie gemeinschaftlich. Wenn ich nehmlich C mit A und B verbinde und mir das entstandene Dreieck ABC so umgelegt denke, daß AB liegen bleibt und der Punkt C in D fällt, so muß auch D beiden Kreisen gemeinschaftlich sein. Der Punkt D liegt nehmlich erstens auf dem um A beschriebenen Kreise, weil zu Folge der Construction AD gleich dem Radius AC ist; und der Punkt D liegt zweitens auch auf dem um B beschriebenen Kreise, weil BD gleich dem Radius BC ist. Da hiernach die Kreise zwei Punkte C und D gemeinschaftlich haben, so können sie sich nicht berühren, sondern sie schneiden sich.

§. 154, a. Lehrsatz.

1) Wenn zwei Kreise sich von Außen in einem Punkte berühren, so liegt der gemeinschaftliche Punkt auf der Centrale, welche daher gleich der Summe der Radien ist.

2) Wenn zwei Kreise sich von Innen in einem Punkte berühren, so liegt der gemeinschaftliche Punkt in der Verlängerung der Centrale, und diese ist daher gleich dem Unterschiede der Radien.

3) Wenn zwei Kreise sich in zwei Punkten durchschneiden, so liegen die beiden gemeinschaftlichen Punkte an entgegengesetzten Seiten der Centrale, und diese ist folglich kleiner, als die Summe, aber größer, als der Unterschied der Radien.

Beweis. 1) Wenn die um A und B (Fig. 97) beschriebenen Kreise sich von Außen in dem Punkte C berühren, so kann der gemeinschaftliche

Punkt C nicht zur Seite der Centrale AB liegen, weil sonst nach Nro. 3 des vorhergehenden §. die Kreise noch einen zweiten Punkt an der entgegengesetzten Seite gemeinschaftlich haben und sich folglich durchschneiden müßten. Da hiernach die Centrale AB durch den Berührungspunkt C geht, so ist sie gleich der Summe der Radien AC + BC.

2) Aus gleichen Gründen muß, wenn die um A und B (Fig. 99) beschriebenen Kreise sich in dem Punkte C von Innen berühren, derselbe auf der Verlängerung der Centrale AB liegen. Folglich ist diese gleich dem Unterschiede der Radien AC — BC.

3) Wenn die um A und B beschriebenen Kreise (Fig. 98, a und b) sich in zwei Punkten C und D durchschneiden, so haben sie eine Sehne CD gemeinschaftlich. Ziehen wir nun durch die Mitte E derselben eine senkrechte Linie, so muß diese nach §. 123, 3 durch beide Mittelpunkte A und B gehen. Demnach liegen die Durchschnittspunkte C und D zu beiden Seiten der Centrale AB. Verbinden wir einen derselben C mit A und B, so ist in dem entstandenen Dreiecke ABC die Centrale AB kleiner, als die Summe der Radien AC + BC, aber größer, als ihr Unterschied AC — BC (§. 62 und 63).

Anm. Die Punkte C und D theilen jeden der beiden um A und B beschriebenen Kreise in zwei Bogen, von denen der eine die Centrale oder deren Verlängerung nach der Seite hin, an welcher der Mittelpunkt des andern Kreises liegt, der andere aber an der entgegengesetzten Seite schneidet. Aus §. 132 folgt noch leicht, daß von diesen beiden Bogen der erstere ganz innerhalb, der andere aber ganz außerhalb des andern Kreises liegt.

§. 154, b. Zusatz.

Wenn zwei Kreise keinen Punkt gemeinschaftlich haben, so kann der eine entweder ganz außerhalb oder ganz innerhalb des andern liegen. Im ersteren Falle (Fig. 96) ist die Centrale AB größer, als die Summe der Radien AC + BD (um das Stück CD); im letzteren Falle (Fig. 100) ist die Centrale AB kleiner, als der Unterschied der Radien AC — BD (um CD).

§. 155, a. Zusatz.

Zur bequemeren Uebersicht wollen wir hier die in den beiden vorhergehenden §§. behandelten Fälle in folgender Art zusammenstellen:

1) Wenn ein Kreis ganz außerhalb des andern liegt, ohne ihn zu treffen (Fig. 96), so ist die Centrale größer, als die Summe der Radien.

2) Wenn zwei Kreise sich von Außen berühren (Fig. 97), so ist die Centrale gleich der Summe der Radien.

3) Wenn zwei Kreise sich schneiden (Fig. 98, a und b), so ist die Centrale kleiner, als die Summe, aber größer, als der Unterschied der Radien.

4) Wenn zwei Kreise sich von Innen berühren (Fig. 99), so ist die Centrale gleich dem Unterschiede der Radien.

5) Wenn ein Kreis ganz innerhalb des andern liegt, ohne ihn zu treffen (Fig. 100), so ist die Centrale kleiner, als der Unterschied der Radien.

§. 155, b. Zusatz.

Da durch die fünf Fälle des vorhergehenden §. die Möglichkeit der verschiedenen Lagen, welche zwei Kreise in einer Ebene haben können, erschöpft

ist, (ein sechster Fall nicht denkbar ist), und von jenen fünf Behauptungen nie zwei zugleich stattfinden können, so müssen sie sämmtlich auch umgekehrt gelten. — Wir beschränken uns hier darauf, die dritte, als die für das Folgende wichtigste, umgekehrt auszusprechen, also:

Zwei Kreise schneiden sich dann gewiß, wenn die Centrallinie kleiner, als die Summe, aber größer, als die Differenz der Radien ist.

Die Kreise können sich nehmlich nicht von Außen oder Innen berühren, weil sonst nach (2) und (4) des vorhergehenden §. die Centrallinie gleich der Summe oder Differenz der Radien sein müßte, welches beides der Voraussetzung widerspricht; und es kann auch nicht der eine ganz außerhalb oder ganz innerhalb des andern liegen, weil sonst nach (1) und (5) des vorhergehenden §. die Centrallinie entweder größer, als die Summe, oder kleiner, als die Differenz der Radien sein müßte, welches ebenfalls gegen die Voraussetzung streitet. Also bleibt nichts Anderes übrig, als daß sich die Kreise schneiden.

§. 156. Lehrsatz.

Wenn von drei Linien a, b und c eine a kleiner, als die Summe der beiden anderen $b+c$, aber größer, als ihr Unterschied $b-c$ gegeben ist, so ist es möglich, aus denselben ein Dreieck zu zeichnen (Fig. 49).

Beweis. Denn wenn ich um die Endpunkte von a (= DE) mit den Radien b und c Kreise beschreibe, so müssen sich diese zu Folge des vorhergehenden §. durchschneiden. Der eine Durchschnittspunkt F mit den Endpunkten von a (D und E) verbunden, liefert nach §. 87 das verlangte Dreieck (DEF).

Anm. In diesem Satze sind die Bedingungen zu der in §. 87 behandelten Aufgabe nachgetragen.

C. Aufgaben.

§. 157. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis eine gegebene Linie als Sehne so einzutragen, daß der eine Endpunkt derselben in einen auf dem Kreise gegebenen Punkt fällt.

Aufl. Der auf dem Kreise gegebene Punkt sei A, die einzutragende Sehne α (Fig. 101). Man beschreibe um A mit α einen Kreis, welcher den gegebenen in den Punkten B und D schneidet, und verbinde einen derselben, z. B. B mit A, so ist AB die verlangte Sehne.

Bedingungen. Eben so gut könnte man auch A mit D verbinden. Die Aufgabe hat also im Allgemeinen zwei Auflösungen, so lange nehmlich α kleiner ist, als der Durchmesser AE. Ist $\alpha = AE$, so berühren sich die Kreise in E, und die Aufgabe hat nur eine Auflösung, nehmlich AE. Ist aber $a > AE$, so ist die Aufgabe gar nicht zu lösen.

§. 158, a. Aufgabe.

An einen Kreis durch einen auf der Peripherie gegebenen Punkt B (Fig. 80) eine Tangente zu ziehen.

Aufl. Man ziehe den Radius BC und durch B senkrecht auf BC die Linie AD, welches nach §. 128, 1 die gesuchte Tangente ist.

§. 158, b. Aufgabe.

An einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen, welche einer gegebenen Linie AD (Fig. 84) parallel ist.

Aufl. Man fälle auf AD aus dem Mittelpunkte C die Senkrechte BC, welche den Kreis in F durchschneidet, und ziehe durch F mit AD die Parallele GH, welche die verlangte Tangente ist.

Beweis. Denn da GH $\parallel$ AD und AD $\perp$ BC gezogen ist, so ist nach §. 47, 2 auch GH $\perp$ BC und folglich GH nach §. 128, 1 eine Tangente.

Anm. Eine zweite Auflösung erhält man, wenn man BC über C verlängert, bis sie die Peripherie in H trifft und durch H eine Parallele mit AD zieht.

§. 158, c. Aufgabe.

An einen Kreis durch einen außerhalb gegebenen Punkt A (Fig. 83) eine Tangente zu ziehen.

(Analysis. Denke ich mir AB als die gesuchte Tangente und verbinde den Mittelpunkt C mit A und B, so ist Winkel ABC ein Rechter. Demnach muß vermöge §. 135, 5 der Punkt B auf einem Halbkreise liegen, dessen Durchmesser AC ist. Hieraus ergiebt sich folgende)

Aufl. Ich verbinde A mit C, halbire AC in E und beschreibe um E mit AE einen Kreis, welcher den gegebenen Kreis in B und D durchschneidet. Einen dieser Punkte, z. B. B, verbinde ich mit A, so ist AB die gesuchte Tangente.

Beweis. Denn wenn ich BC ziehe, so ist Winkel ABC ein Rechter, als Winkel im Halbkreise; folglich berührt AB den Kreis, weil sie auf dem Radius BC senkrecht steht.

Anm. Eine zweite Tangente erhalte ich, wenn ich A mit D verbinde. Es lassen sich also aus jedem außerhalb des Kreises gegebenen Punkte zwei Tangenten an denselben ziehen.

§. 159, a. Aufgabe.

Von einem gegebenen Kreise einen Abschnitt abzuschneiden, welcher einen gegebenen Peripheriewinkel α (Fig. 75) faßt.

Aufl. Man zeichne in den Kreis einen Centriwinkel ACB $= 2\alpha$ und ziehe die Sehne AB; dann ist jeder Peripheriewinkel des entstandenen Abschnitts AFB nach §. 134 gleich α.

Bemerkung. Bei der letzten Aufgabe sind der Radius und der Winkel des Kreisabschnitts gegeben; in §. 157 waren der Radius und die Sehne gegeben; in der nun folgenden Aufgabe sind Sehne und Winkel gegeben und der Radius gesucht.

§. 159, b. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Linie AB (Fig. 102) als Sehne einen Kreisabschnitt zu zeichnen, welcher einen gegebenen Winkel faßt.

(Die Analysis ist in §. 137 enthalten.)

Aufl. Man trage den gegebenen Winkel α in A an AB an, $=$ BAD, halbire AB und errichte im Halbirungspunkte E auf AB und in A auf AD Lothe, welche sich in C durchschneiden; dann ist C der Mittelpunkt des gesuchten Abschnitts.

Beweis. Der mit dem Radius AC um den Punkt C zu beschreibende Kreis muß erstens durch den Punkt B gehen; denn, wenn wir C mit B ver-

binden, so ist das entstandene Dreieck ABC gleichschenklig, weil zu Folge der Construction die Grundlinie AB durch die Höhe CE halbirt ist, also AC = BC, und folglich ist AB eine Sehne des zu beschreibenden Kreises. Zweitens ist die Linie AD eine Tangente an diesen Kreis, weil sie nach der Construction auf dem Radius AC senkrecht steht; daher ist jeder in den Kreisabschnitt AFB gezeichnete Peripheriewinkel gleich α, nach dem Satze: Der Winkel, welchen die Sehne mit der Tangente bildet, ist dem Winkel im entgegengesetzten Abschnitte gleich.

D. Anhang.

Von geometrischen Oertern.

§. 160. Erklärung.

Wenn ein Punkt gesucht wird, welcher einer gewissen Bedingung Genüge leistet, und es giebt nicht bloß einen solchen Punkt (oder eine beschränkte Anzahl derselben), sondern es erfüllen alle Punkte einer geraden oder krummen Linie die aufgegebene Bedingung, während dieß von keinem Punkte außerhalb dieser Linie gilt, so sagt man auch: die Linie sei der geometrische Ort des Punktes, welcher der vorgeschriebenen Bedingung genügt.

Man versteht also unter dem geometrischen Orte eines Punktes diejenige gerade oder krumme Linie, deren Punkte sämmtlich eine gewisse Bedingung erfüllen.

So ist z. B. der geometrische Ort eines Punktes, welcher von einem gegebenen Punkte einen vorgeschriebenen Abstand hat, die mit diesem Abstande um den gegebenen Punkt beschriebene Kreislinie; — ferner der geometrische Ort eines Punktes, welcher von einer gegebenen geraden Linie einen vorgeschriebenen Abstand hat, eine mit derselben parallele gerade Linie; — weiter der geometrische Ort eines Punktes, welcher von den Endpunkten einer gegebenen geraden Linie gleichen Abstand hat, ein in der Mitte dieser Linie errichtetes Loth; — der geometrische Ort des Scheitelpunktes eines Winkels von vorgeschriebener Größe, dessen Schenkel durch die Endpunkte einer gegebenen geraden Linie gehen, ein über dieser Linie als Sehne beschriebener Kreisbogen u. dgl. m.

Anm. Die besondere Betrachtung der geometrischen Oerter ist für die Auflösung vieler Aufgaben sehr förderlich; ja, streng genommen dürfte es nur wenige Aufgaben geben, deren Auflösung nicht auf geometrischen Oertern beruhte; so z. B. gleich die Auflösung der ersten Aufgabe, welche wir in diesem Lehrbuche behandelt haben (§. 87), ist durch Benutzung zweier geometrischen Oerter (zweier Kreise) erhalten worden.

Zur Erläuterung noch das folgende Beispiel:

§. 161. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die Grundlinie α, die Höhe β und der Winkel an der Spitze γ gegeben sind (Fig. 103).

Analysis. Denken wir uns bereits die Grundlinie AB = α hingezeichnet, so fehlt uns allein noch die Spitze C. Für diese ist uns aber durch die Bedingungen der Aufgabe ein doppelter geometrischer Ort gegeben. Sie muß nehmlich erstens, da die Höhe des Dreiecks gegeben ist, auf einer mit AB in dem Abstande der Höhe parallel gezogenen Linie, und zweitens, weil

der Winkel an der Spitze gegeben ist, auf einem über AB, als Sehne, beschriebenen Kreisbogen, welcher den gegebenen Winkel faßt, zu suchen sein; sie wird also da liegen, wo diese beiden Oerter sich durchschneiden. Hieraus ergiebt sich die folgende

Aufl. Man zeichne die gegebene Grundlinie AB $= \alpha$ hin, beschreibe über derselben, als Sehne, nach §. 159, b einen Kreisbogen, welcher den gegebenen Winkel γ faßt, errichte dann in einem beliebigen Punkte von AB, um des Folgenden Willen am bequemsten in der Mitte D, ein Loth, schneide von demselben die Höhe $\beta =$ DE ab und ziehe durch den Endpunkt E mit AB eine Parallele, welche den vorher beschriebenen Bogen in zwei Punkten C und G durchschneidet; endlich verbinde man einen von diesen Punkten, z. B. C mit A und B, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Bedingungen. Die Höhe β darf nicht größer sein, als die Höhe DF des Abschnitts AFD; wäre $\beta =$ DF, so würde man ein gleichschenkliges Dreieck erhalten.

Wenn man den Durchschnittspunkt G mit A und B verbindet, so entsteht ein zweites, aber mit ABC congruentes Dreieck ABG. Es ist nehmlich

AB = AB,
Winkel ACB = AGB nach §. 135
und Winkel ABC = BAG, weil n. §. 136 Bog. AC=BG ist,
folglich $\triangle$ ABC $\cong$ ABG nach §. 72.

Diese Aufgabe hat also, so lange nicht $\alpha >$ DF ist, eine Auflösung.

Uebungsaufgaben.

A. Dreiecksaufgaben.

Aufgabe 120. In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen.

Aufgabe 121 — 123. In einen gegebenen Kreis ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben ist:

121) die Grundlinie (zwei Auflösungen);
122) der Winkel an der Spitze;
123) ein Winkel an der Grundlinie.

Aufgabe 124 — 137. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

124) zwei Seiten (zwei Auflösungen);
125) die Grundlinie und die Höhe (zwei Auflösungen);
126) die Grundlinie und die Mittellinie, (die Linie von der Spitze nach der Mitte der Grundlinie gezogen);
127) der Winkel an der Spitze und die Höhe;
128) der Winkel an der Spitze und die Mittellinie;
129) die Grundlinie und ein Winkel an derselben (zwei Auflösungen);
130) eine Seite und die Höhe (zwei Auflösungen);
131) eine Seite und die Mittellinie (zwei Auflösungen *);

---

*) Nachdem man die Seite als Sehne in den Kreis eingetragen hat, ergiebt sich für die Mitte der Grundlinie durch die gegebene Mittellinie und §. 123, 1 ein doppelter geometrischer Ort.

132) zwei Winkel;

133) die beiden Abschnitte, in welche die Grundlinie durch die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze getheilt wird;

134) die Grundlinie und der Unterschied der Winkel an derselben (zwei Auflös.);

135) die Höhe und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie *);

136) die Höhe und der Unterschied der beiden Segmente **);

137, a) die Mittellinie und der Unterschied der Segmente;

137, b) die Mittellinie und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie;

137, c) die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze und der Unterschied der Segmente;

137, d) die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie.

Aufgabe 138 — 148. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

138) die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und die Mittellinie;

139) die beiden Segmente und der Winkel an der Spitze;

140) die Höhe, der Unterschied der beiden Segmente und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie;

141) die beiden Segmente und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie (zwei Auflösungen);

142) der Winkel an der Spitze und die Abschnitte, in welche die Halbirungslinie desselben die Grundlinie theilt;

143) die Grundlinie und die beiden Winkel, welche die Mittellinie mit den beiden Seiten bildet;

144) die Mittellinie, ein Winkel an der Grundlinie und die gegenüberliegende Seite (zwei Auflösungen);

145) die Mittellinie, der Winkel an der Spitze und eine Seite;

146) die Höhe, die Mittellinie und der Radius des um das Dreieck zu beschreibenden Kreises (zwei Auflösungen);

147) die Grundlinie und die aus den Endpunkten derselben auf die Seiten gefällten Lothe (zwei Auflösungen);

148) die Mittellinie und die aus den Endpunkten der Grundlinie auf die Seiten gefällten Lothe (zwei Auflösungen);

*148, a) der Unterschied der Segmente, der Unterschied der Winkel an der Grundlinie und die Mittellinie;

*148, b) der Unterschied der Segmente, der Unterschied der Winkel an der Grundlinie und die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze;

*148, c) die Höhe, die Mittellinie und die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze;

*148, d) die Höhe, der Unterschied der Segmente und die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze;

*148, e) der Unterschied der Segmente, die Mittellinie und die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze.

Aufgabe 149. Um einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen.

Aufgabe 150 — 152. Um einen gegebenen Kreis ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben ist:

---

*) Man gelangt zur Auflösung dieser und der nächstfolgenden Aufgaben, wenn man durch die Spitze des Dreiecks eine Sehne parallel mit der Grundlinie zieht.

**) Die beiden Abschnitte, in welche die Grundlinie durch die Höhe getheilt wird.

150) die Grundlinie;

151) die Höhe;

152) der Winkel an der Spitze.

Aufgabe 153 — 157. Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

153) zwei Winkel;

154) der Winkel an der Spitze und die Halbirungslinie desselben;

155) die Höhe und ein Winkel an der Grundlinie;

156) die Höhe und eine Seite (zwei Auflösungen);

157) die Höhe und der Winkel an der Spitze *).

Aufgabe 158 — 160. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

158) die Höhe, die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze und der Radius des hinein zu beschreibenden Kreises;

159) die Höhe, der Unterschied der Winkel an der Grundlinie und der Radius des hinein zu beschreibenden Kreises;

160) die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze, der Unterschied der Winkel an der Grundlinie und der Radius des hinein zu beschreibenden Kreises.

Aufgabe 161 — 162. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

161) der Umfang, die Höhe und der Winkel an der Spitze;

162, a) die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und der Radius des in das Dreieck zu beschreibenden Kreises.

162, b und c) der Radius des um- und einzubeschreibenden Kreises und eine Seite oder ein Winkel.

B. Vierecksaufgaben.

Aufgabe 163 — 165. Ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind (Fig. 72) zwei Seiten (a und d), der eingeschlossene Winkel (A) und

163) der gegenüberliegende Winkel (C) und die beide gegebenen Winkel verbindende Diagonale (e) (zwei Auflösungen);

164) der gegenüberliegende Winkel (C) und der Winkel, welchen die Diagonalen einschließen;

165) die beiden Winkel (ACB und ACD), welche die nicht gegebenen Seiten mit der aus der Spitze des gegebenen Winkels gezogenen Diagonale (e) bilden **).

Aufgabe 166 — 168. Ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind (Fig. 72) eine Diagonale (f), die ihr gegenüberliegenden Winkel (A und C) und

166) der Winkel, welchen die Diagonalen einschließen, und eine Seite a (zwei Auflösungen);

167) zwei mit der gegebenen Diagonale in eine Ecke zusammenstoßende Seiten a und b (vier Auflösungen);

168) zwei einander gegenüberliegende Seiten a und c (vier Auflösungen).

Aufgabe 169 — 171 ***). Ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind (Fig. 72) die beiden Diagonalen (e und f), der von denselben eingeschlossene Winkel und

*) Die Auflösung dieser und der drei folgenden Aufgaben wird erhalten, wenn man durch den Mittelpunkt eine Parallele zur Grundlinie zieht.

**) Diese Aufgabe ist in der Feldmeßkunst unter dem Namen der Pothenotischen bekannt.

***) Wenn man durch die Endpunkte einer Diagonale f zwei Linien parallel und gleich mit der andern Diagonale e zieht und die Endpunkte dieser Linien verbindet, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Betrachtung leicht zu der Auflösung dieser Aufgaben hinführt.

169) eine Seite a und ein dieser Seite nicht anliegender Winkel C (zwei Aufl.);

170) zwei einander gegenüberliegende Winkel A und C (zwei Auflösungen);

171) zwei an einer Seite liegende Winkel A und B (zwei Auflösungen).

Aufgabe 172 — 175. Ein Viereck zu zeichnen, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, wenn gegeben sind (Fig. 72):

172) drei Seiten (a, b und c) und ein von denselben eingeschlossener Winkel (B) (zwei Auflösungen);

173) drei Seiten (a, b und c) und ein von denselben nicht eingeschlossener Winkel (A) (zwei Auflösungen);

174) zwei gegenüberstehende Seiten (a und c) und die Winkel (BAC und ACD), welche sie mit einer Diagonale bilden;

175) die beiden Diagonalen e und f, der von denselben eingeschlossene Winkel und ein Winkel ABD, welchen eine Seite mit einer Diagonale bildet.

Aufgabe 176 — 179. In einen gegebenen Kreis ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind (Fig. 72):

176) drei von den Winkeln, welche eine Diagonale mit den Seiten bildet, (z. B. Winkel BAC, DAC und ACB);

177) eine Seite (c) und die Winkel (ACD und BDC), welche die gegenüberliegende Seite (a) mit den Diagonalen bildet (zwei Auflösungen);

178) der Winkel, welchen die Diagonalen einschließen, und die Winkel (BAC und ACB), welche eine Diagonale (e) mit zwei zusammenstoßenden Seiten bildet;

179) beide Diagonalen (e und f) und der von denselben eingeschlossene Winkel.

Aufgabe 180 — 181. Um einen gegebenen Kreis ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind (Fig. 72):

180) drei Winkel (A, B und C);

181) eine Seite (a) und zwei einander gegenüberliegende Winkel (A und C).

Aufgabe 182. Um einen gegebenen Kreis ein Trapez zu zeichnen, von welchem die beiden nicht parallelen Seiten gegeben sind.

Aufgabe 183. Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu zeichnen, von welchem eine Seite gegeben ist.

Aufgabe 184 — 186. Ein Viereck zu zeichnen, in welches sich ein Kreis beschreiben läßt, wenn von demselben gegeben sind (Fig. 72):

184) zwei zusammenstoßende Seiten (a und b) und die der einen anliegenden Winkel (A und B);

185) eine Seite (a) und drei Winkel (A, B und C);

186) drei Seiten (a, b, c) und ein Winkel (A).

C. Kreisaufgaben.

Aufgabe 187 — 192. Einen Kreis zu zeichnen, welcher

187) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Linie in einem gegebenen Punkte berührt;

188) durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt (zwei Auflösungen, je nachdem äußere oder innere Berührung stattfinden soll);

189) zwei sich schneidende Linien berührt und zwar die eine derselben in einem gegebenen Punkte;

190) eine Linie und einen Kreis und zwar den Kreis in einem gegebenen Punkte;

191) eine Linie und einen Kreis und zwar die Linie in einem gegebenen Punkte;

192) zwei Kreise und zwar den einen in einem gegebenen Punkte.

Aufgabe 193 — 201 *). Diejenige gerade oder krumme Linie zu bestimmen, in welcher die Mittelpunkte aller der Kreise liegen, welche einen gegebenen Radius haben und

193) durch einen gegebenen Punkt gehen;

194) eine gegebene Linie berühren;

195) einen gegebenen Kreis von Außen berühren;

196) einen gegebenen Kreis einschließend berühren;

197) von einer der Lage nach gegebenen Linie eine Sehne von vorgeschriebener Länge abschneiden;

198) eine der Lage nach gegebene Linie unter einem gegebenen Winkel schneiden, (d. h. daß die durch den Durchschnittspunkt gezogene Tangente mit der gegebenen Linie einen vorgeschriebenen Winkel bildet);

199) eine gegebene Kreislinie halbiren;

200) eine gegebene Kreislinie so durchschneiden, daß die beiden gemeinschaftliche Sehne einer gegebenen Linie gleich wird;

201) (eine gegebene Kreislinie unter einem gegebenen Winkel durchschneiden, d. h. daß die am Durchschnittspunkte gezogenen Tangenten einen gegebenen Winkel einschließen).

D. Vermischte Aufgaben.

Aufgabe 202 — 208. Durch die eine Ecke C eines Dreiecks ABC eine die Grundlinie AB nicht schneidende Linie so zu ziehen, daß, wenn man aus den beiden anderen Ecken A und B auf die gesuchte Linie Lothe fällt, welche dieselbe in den Punkten X und Y treffen,

202) $AX = BY$ wird;

203) $AX = 2BY$ wird **);

204) $AX - BY$ einer gegebenen Linie gleich wird;

205) $AX + BY$ einer gegebenen Linie gleich wird;

206) $CX = CY$ wird;

207) $CX + CY$ einer gegebenen Linie gleich wird;

208) $CY - CX$ einer gegebenen Linie gleich wird.

Aufgabe 209 — 215. Dieselben Aufgaben, jedoch mit der Abänderung, daß die gesuchte Linie AB durchschneiden soll.

Aufgabe 216. In einen gegebenen Kreis eine Sehne von vorgeschriebener Länge so einzutragen, daß sie einer gegebenen Linie parallel wird (zwei Auflösungen).

Aufgabe *216. In einem gegebenen Kreise eine Sehne so zu ziehen, daß sie einer gegebenen Linie parallel wird und den Kreis unter einem gegebenen Winkel durchschneidet.

Aufgabe 217 — 219. Es ist ein Kreis und innerhalb desselben ein Punkt P gegeben; es soll durch diesen Punkt eine Sehne XY so gezogen werden, daß

217) die Sehne XY in dem gegebenen Punkte P halbirt ist;

218) daß die Sehne XY einer gegebenen Linie gleich wird (zwei Auflösungen);

219) daß der Unterschied der beiden Abschnitte der Sehne $PX - PY$ einer gegebenen Linie gleich wird (zwei Auflösungen).

Aufgabe 220 — 222. Es ist ein Kreis und außerhalb desselben ein

---

*) Wenn man diese 9 unbestimmten Aufgaben zu je zweien mit verstatteter Wiederholung combinirt, so erhält man 45 bestimmte Aufgaben.

**) Die Aufgaben 202, 203 und 206 erfordern die Anwendung der Sätze vom Kreise nicht.

Punkt P gegeben; es soll durch diesen Punkt eine Linie, welche den Kreis zuerst im Punkte X und zum zweiten Male in Y durchschneidet, so gezogen werden, daß

220) die Sehne XY einer gegebenen Linie gleich wird (zwei Auflösungen);

221) daß PX = XY wird (zwei Auflösungen);

222) daß PX + PY einer gegebenen Linie gleich wird (zwei Auflösungen).

Aufgabe 223 — 226. Es ist eine Linie und ein Kreis gegeben; es soll zwischen dem Kreise und der Linie eine Linie von vorgeschriebener Länge so gezogen werden, daß sie

223) einer gegebenen Linie parallel wird (zwei Auflösungen);

224) den gegebenen Kreis berührt (vier Auflösungen);

225) unter einem gegebenen Winkel schneidet (vier Auflösungen);

226) so durchschneidet, daß die entstandene Sehne eine vorgeschriebene Länge hat (vier Auflösungen).

Aufgabe 227 — 229. Es sind zwei Kreise gegeben; es soll zwischen denselben eine Linie so gezogen werden, daß sie

227) beide Kreise berührt (vier Auflösungen);

228) den einen berührt und den andern unter einem gegebenen Winkel durchschneidet (vier Auflösungen);

229) den einen berührt und innerhalb des andern eine Sehne von vorgeschriebener Länge entsteht (vier Auflösungen); u. dgl. m.

Aufgabe 230. In einen gegebenen Kreisausschnitt einen Kreis zu zeichnen, welcher beide Radien und den Bogen des Ausschnitts berührt.

Aufgabe 231. Um die Ecken eines Dreiecks drei sich von Außen berührende Kreise zu beschreiben.

Aufgabe 232. In ein gleichseitiges Dreieck drei Kreise zu zeichnen, von denen jeder die beiden anderen Kreise von Außen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.

Aufgabe *232. An den Bogen eines Kreisausschnitts eine Tangente von vorgeschriebener Länge so zu ziehen, daß ihre Endpunkte auf die Verlängerungen der Radien fallen.

Siebenter Abschnitt.

Von der Gleichheit der Figuren.

Bemerkung. In allen vorhergehenden Abschnitten ist nur die Größe der an und in den Figuren vorkommenden Linien und Winkel, niemals die Größe der Figuren selbst in Betracht gezogen; in diesem Abschnitte werden wir die Figuren selbst in Hinsicht ihrer Größe mit einander vergleichen.

Linien und Winkel lassen sich nur in Hinsicht ihrer Größe mit einander vergleichen. Zwei Linien oder zwei Winkel sind entweder gleich oder ungleich. Figuren können außer in Hinsicht auf ihre Größe, auch in Hinsicht ihrer Gestalt verglichen werden. Zwei Figuren, welche in der Größe übereinstimmen, heißen gleich; stimmen sie in der Gestalt überein, so heißen sie ähnlich. Stimmen zwei Figuren in Gestalt und Größe, also vollständig mit einander überein, so heißen sie congruent. Linien und Winkel sind schon dann congruent, wenn sie gleiche Größe haben; Figuren können einerlei Größe haben bei verschiedener Gestalt, sie können also einander gleich sein, ohne congruent zu sein. Eben so können zwei Figuren dieselbe

Gestalt bei sehr verschiedener Größe haben; alle Quadrate haben dieselbe Gestalt, aber keineswegs dieselbe Größe. Alle Quadrate sind also ähnlich, aber sie sind nicht alle gleich.

Während in den vorhergehenden Abschnitten nur von der vollständigen Uebereinstimmung in Gestalt und Größe, also von der Congruenz (oder Nichtcongruenz) die Rede gewesen ist, behandelt der nächste Abschnitt die Gleichheit, unberücksichtigt lassend die Gestalt, und der folgende die Aehnlichkeit, unberücksichtigt lassend die Größe.

§. 162. Erklärung.

Zwei Figuren heißen gleich, wenn eine dritte Figur in beiden gleich vielmal enthalten ist.

Congruente Figuren sind daher nothwendig auch gleich, und eben so sind zwei Figuren einander gleich, wenn sie sich in congruente Stücke zerschneiden lassen.

Eine Figur ist größer, als eine andere, wenn die letztere einem Theile der ersteren gleich ist.

Anm. 1. In Figur 105 ist das Quadrat ABCD gleich dem Rechtecke EFGH, weil in jeder dieser Figuren das Quadrat α viermal enthalten ist. In Figur 104 ist $\alpha \cong$ a und $\beta \cong$ b, folglich ist das Dreieck ABC gleich dem Parallelogramme DEFG.

Anm. 2. Es können aber auch zwei Figuren, z. B. ein Kreis und ein Dreieck, einander gleich sein, ohne daß es möglich ist, dieselben in congruente Stücke zu zerschneiden, so wie ich mir die Quadratwurzel aus 2 wohl denken kann, obschon ich nicht im Stande bin, dieselbe wirklich anzugeben. Wenn eine geradlinige und eine krummlinige Figur einander als gleich erwiesen werden, sei es nun durch die höhere Analysis oder nach der Methode der Alten, so geschieht dies doch nie anders, als daß man sich beide in unendlich viele und unendlich kleine Stücke zerschnitten denkt und zeigt, daß die Stücke der einen Figur denen der andern congruent sind (vergl. §. 167, 2), wie auch immer das hier offen Ausgesprochene umschrieben und eingekleidet werden mag.

§. 163. Lehrsatz.

Parallelogramme mit gleicher Höhe und Grundlinie sind gleich.

Beweis. Man denke sich die beiden Parallelogramme ABCD und ABEF (Fig. 106) so zusammengelegt, daß die gleichen Grundlinien in der Linie AB zusammenfallen; dann müssen die Punkte D, C, F und E, da die Parallelogramme nach der Voraussetzung gleiche Höhe haben, in einer geraden Linie liegen — nach dem Satze (§. 110, 3): Wenn mehrere Punkte von einer geraden Linie gleichen Abstand haben, so liegen sie selbst in einer geraden Linie. — Nun lassen sich zunächst zwei Dreiecke als congruent erweisen, nehmlich ADF und BCE, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, nehmlich

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ AF = BE \end{array}\right\} \text{als gegenüberstehende Seiten in Parallelogrammen,}$$

W. DAF = CBE, als Winkel mit parallelen Schenkeln,

folglich $\triangle$ DAF $\cong$ CBE nach §. 70.

Ziehe ich nun von dem ganzen Trapeze ABED das Dreieck DAF ab, so bleibt das Parallelogramm ABEF übrig, und wenn ich von demselben Trapeze ABED das Dreieck BCE abziehe, so bleibt Parallelogramm ABCD

übrig. Da ich Gleiches von Gleichem abgezogen habe, so muß auch Gleiches übrig bleiben; folglich ist Parallelogramm ABCD = ABEF.

Anm. Daß das längere Parallelogramm ABEF doch nur die Größe von ABCD hat, erklärt sich daraus, daß ABCD in demselben Verhältnisse breiter ist, als ABEF länger ist.

Uebungsfrage. Wie lassen sich zwei Parallelogramme, welche gleiche Höhe und Grundlinie haben, in congruente Stücke zerschneiden? —

§. 164. Lehrsatz.

Das Dreieck (ABC, Fig. 107) ist halb so groß, als ein Parallelogramm (DEFG), welches mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat.

Beweis. Denn wenn ich das Dreieck ABC zum Parallelogramm vervollständige, indem ich durch C eine Parallele mit AB und durch B eine Parallele mit AC ziehe, so ist das entstandene Parallelogramm ABHC nach §. 107 doppelt so groß, als das Dreieck ABC, und nach dem letzten §. gerade so groß, als das Parallelogramm DEFG, weil es mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat. Demnach ist auch Dreieck ABC halb so groß, als Parallelogramm DEFG.

§. 165. Zusatz.

1) Dreiecke mit gleicher Höhe und Grundlinie sind gleich. — Denn sie sind zu Folge des vorhergehenden §. die Hälften gleicher Parallelogramme.

2) Jedes Dreieck ABC (Fig. 108) ist gleich einem Parallelogramme ADEC, welches dieselbe Höhe, aber nur die halbe Grundlinie hat. — Denn beide sind die Hälfte des Parallelogramms ABGC.

3) Jedes Dreieck ABC (Fig. 109) ist gleich einem Parallelogramme ABDE, welches dieselbe Grundlinie, aber nur die halbe Höhe hat. — Denn beide sind Hälften des nehmlichen Parallelogramms ABFC.

Anm. Auch sieht man leicht, daß △ ABC und □ ADEC in Figur 108 und △ ABC und □ ABDE in Figur 109 aus denselben congruenten Stücken bestehen.

§. 166. Lehrsatz.

Jedes Trapez ist einem Parallelogramme gleich, welches die Höhe des Trapezes zur Höhe und die mittlere Länge des Trapezes zur Grundlinie hat.

Beweis. Das Trapez ABCD (Fig. 67) und das Parallelogramm AHGD haben das Fünfeck AHFCD gemeinschaftlich, und die nicht gemeinschaftlichen Dreiecke BFH und CFG sind schon in §. 114 als congruent erwiesen. Folglich ist das Trapez ABCD gleich dem Parallelogramme AHGD.

§. 167. Lehrsatz.

1) Das regelmäßige Vieleck ist einem Dreiecke gleich, welches den Umfang des Vielecks zur Grundlinie und den Abstand des Mittelpunktes von einer Polygonseite zur Höhe hat.

2) Der Kreis ist einem Dreieck gleich, welches die Peripherie zur Grundlinie und den Radius zur Höhe hat.

Beweis. 1) Um das regelmäßige Vieleck ABCDEF (Fig. 110) in ein Dreieck zu verwandeln, schneide ich von dem einen Schenkel eines rechten Winkels KHR den Abstand des Mittelpunktes M von einer Polygonseite, MG = KH, und von dem andern Schenkel die Seiten des Vielecks, AB, BC, CD u. s. w. gleich mit HL, LN, NO u. s. w. nach der Reihe ab, verbinde den letzten Endpunkt R mit K und behaupte, daß das entstandene Dreieck KHR gleich dem regelmäßigen Vielecke ABCDEF ist. — Denn wenn ich in dem Vielecke den Mittelpunkt M mit sämmtlichen Ecken A, B, C . . . und in dem Dreiecke KHR die Spitze K mit sämmtlichen Theilungspunkten der Grundlinie L, N, O . . . verbinde, so werden beide Figuren in gleich viel Dreiecke zerschnitten, und die Dreiecke in der einen Figur sind denen in der andern gleich, weil sie gleiche Höhe und gleiche Grundlinie haben. Demnach ist das regelmäßige Vieleck ABCDEF gleich dem Dreiecke KHR, welches den Umfang des Vielecks zur Grundlinie und den Abstand des Mittelpunktes von der Polygonseite zur Höhe hat.

2) Je größer die Anzahl der Seiten eines regelmäßigen Vielecks ist, um so mehr nähert sich dasselbe dem Kreise. Denkt man sich nun den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten, so geht der Umfang des Vielecks in die Peripherie und der Abstand einer Polygonseite vom Mittelpunkte in den Radius des Kreises über, woraus die Richtigkeit der obigen Behauptung (2) hervorgeht.

§. 168. Lehrsatz.

Wenn man in einem Parallelogramme ABCD (Fig. 111) eine Diagonale AC zieht, in derselben einen beliebigen Punkt E annimmt und durch diesen mit den Seiten des Parallelogramms die Parallelen FG und HK zieht, so sind die beiden entstandenen Parallelogramme FEHD und EKBG, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich. — Man nennt diese beiden Parallelogramme die Complemente.

Beweis. Da jedes Parallelogramm durch die Diagonale halbirt wird, so ist

$$\triangle\ ACD = ABC,$$
$$\triangle\ \alpha = \beta,$$
$$\triangle\ \gamma = \delta,$$

folglich wenn wir α und γ von ACD und β und δ von ABC subtrahiren,

Parallelogramm FEHD = EKBG.

§. 169. Der pythagoräische Lehrsatz.

Wenn man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC (Fig. 112) Quadrate zeichnet, so ist das über der Hypotenuse verzeichnete Quadrat BCDE so groß, als die Quadrate über den Catheten ABFG und ACHK zusammen genommen.

Beweis. Man fälle aus der Spitze A des rechten Winkels CAB ein Loth AL auf die Hypotenuse BC und verlängere dasselbe, bis es DE in M schneidet; dann wird das Quadrat BCDE in zwei Rechtecke BLME und CLMD zerschnitten, von denen das erstere gleich dem Quadrate ABFG und das letztere gleich dem Quadrate ACHK ist. Um zunächst zu zeigen, daß ABFG = BLME ist, ziehe man die Hilfslinien AE und CF, so entstehen zwei Dreiecke ABE und FBC, welche congruent sind, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen; es ist nehmlich

	Winkel ABE	$= 90^0 + \alpha$ und CBF auch $= 90^0 + \alpha$,
folglich	Winkel ABE	$=$ CBF,
ferner	Seite AB	$=$ BF, als Seiten des Quadrats ABFG,
	Seite BE	$=$ BC, „ „ „ „ BCDE;
folglich	$\triangle$ ABE	$\cong$ CBF.

Das Dreieck ABE ist die Hälfte des Rechtecks BLME, weil es mit ihm gleiche Grundlinie BE und gleiche Höhe BL hat; und das Dreieck CBF ist die Hälfte vom Quadrate ABFG, weil es mit ihm gleiche Grundlinie BF und gleiche Höhe AB hat. Da wir nun die Hälften ($\triangle$ ABE und CBF) als gleich erwiesen haben, so müssen auch die Ganzen gleich sein. Also ist das Rechteck BLME gleich dem Quadrate ABFG.

Eben so läßt sich zeigen, daß das Rechteck CLMD gleich dem Quadrate ACHK ist, indem man die Hilfslinien AD und BH zieht.

Da nun das Quadrat BCDE aus den beiden Rechtecken BLME und CLMD besteht, welche gleich den Quadraten ABFG und ACHK erwiesen sind, so ist folglich das Quadrat BCDE so groß, als die beiden Quadrate ABFG und ACHK zusammen genommen, w. z. b. w. *)

Anm. Der pythagoräische Lehrsatz ist darum so wichtig, weil auf ihm die ganze rechnende Geometrie, also zunächst die Trigonometrie beruht. Ohne diesen Satz würde eine so wichtige mathematische Disciplin, wie die Trigonometrie, gar nicht existiren.

§. 170. Zusatz.

Im Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes haben wir gesehen, daß das Rechteck BLME (Fig. 112) gleich dem Quadrate ABFG ist. In dem Rechtecke BLME ist eine Seite BE gleich der Hypotenuse BC und die andere Seite BL ist einer von den Abschnitten, in welche die Hypotenuse durch das aus der Spitze des rechten Winkels gefällte Loth AL getheilt wird, und zwar ist BL derjenige Abschnitt, welcher an der Cathete AB liegt, deren Quadrat ABFG gleich dem Rechtecke BLME ist. Demnach können wir folgenden Satz aufstellen:

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke aus der Spitze des rechten Winkels ein Loth auf die Hypotenuse fällt, so ist das **Quadrat einer Cathete so groß, als das Rechteck aus der ganzen Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte.**

§. 171. Erklärung.

Eine Figur in eine andere **verwandeln** heißt eine derselben gleiche Figur zeichnen.

§. 172. Aufgabe.

Ein gegebenes Viereck ABCD (Fig. 114) **in ein Dreieck zu verwandeln, so daß eine Seite** AD **und ein Winkel** A **ungeändert bleiben.**

---

*) Der pythagoräische Lehrsatz ist hergebrachter Weise hier mit aufgeführt. An dieser Stelle tritt derselbe als eine nur unvollkommen vorbereitete und daher überraschende Erscheinung auf. In dem natürlichsten Zusammenhange und in größter Einfachheit geht derselbe aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke hervor (vergl. unten §. 199). Wäre der Satz noch nicht bekannt, so möchten wohl nur wenige Mathematik Studirende durch das Vorangehende von selbst auf diesen Satz geführt werden, dagegen dürfte sich derselbe wohl kaum der Entdeckung irgend eines Mathematikers entziehen, welcher sich mit Untersuchungen über die Aehnlichkeit der Dreiecke beschäftigte.

Aufl. Man ziehe die Diagonale BD und mit derselben durch C eine Parallele, welche die verlängerte AB in E schneidet, verbinde endlich D mit E, so ist ADE das verlangte Dreieck.

Beweis. Denn das Viereck ABCD und das Dreieck ADE haben das Dreieck ABD gemeinschaftlich und die nicht gemeinschaftlichen Dreiecke BDC und BDE sind gleich, weil sie dieselbe Grundlinie BD haben und zwischen den Parallelen BD und CE liegen, also auch gleiche Höhe haben. Folglich ist auch, wenn ich Gleiches zu Gleichem addire, Viereck ABCD = Dreieck ADE.

§. 173. Aufgabe.

Ein Vieleck in ein anderes zu verwandeln, welches eine Ecke weniger hat.

Aufl. Das gegebene Vieleck sei ABCDEF (Fig. 115). Man schneide von demselben durch eine Diagonale BD ein Dreieck BCD ab, ziehe durch C mit BD eine Parallele, welche die verlängerte Seite AB in G schneidet, und verbinde D mit G; dann ist das entstandene Dreieck BGD = BCD, weil beide dieselbe Grundlinie BD haben und zwischen den Parallelen BD und CG liegen, also auch gleiche Höhe haben. Wenn wir nun zu den beiden gleichen Dreiecken BGD und BCD Vieleck ABDEF addiren, so ergiebt sich Vieleck AGDEF = ABCDEF. — Das erstere hat aber eine Ecke weniger, als das letztere, weil AB und BG eine gerade Linie bilden.

§. 174. Aufgabe.

Ein beliebiges Vieleck, z. B. ein Siebeneck, in ein Dreieck zu verwandeln.

Aufl. Man verwandle mit Hilfe des vorhergehenden §. das Siebeneck zuerst in ein Sechseck, dieses hierauf in ein Fünfeck, das Fünfeck in ein Viereck und endlich das Viereck in ein Dreieck. — Welches aber auch immer die Zahl der Seiten eines Vielecks sein mag, so wird man mit Hilfe des vorhergehenden §. doch immer leicht im Stande sein, dasselbe in ein Dreieck zu verwandeln.

§. 175. Aufgabe.

Ein Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln.

Aufl. Das gegebene Dreieck sei ABC (Fig. 116); man halbire die Grundlinie AB in D, errichte auf derselben in A und D Lothe und ziehe durch C eine Parallele mit der Grundlinie, welche die Lothe in F und E schneidet; dann ist das entstandene Rechteck ADEF = △ ABC, weil es dieselbe Höhe und die halbe Grundlinie hat.

§. 176. Aufgabe.

Ein Rechteck ABCD (Fig. 113) in ein Quadrat zu verwandeln. (Die Analysis ist in §. 170 enthalten.)

Aufl. Man beschreibe über der größeren Seite AB einen Halbkreis, schneide von der größeren Seite von A aus die kleinere AD = AE ab, errichte in E auf AB ein Loth EF, welches den Halbkreis in F schneidet, und verbinde A mit F. Dann ist das über AF gezeichnete Quadrat AFGH dem gegebenen Rechtecke ABCD gleich.

Beweis. Denn wenn man noch BF zieht, so ist Winkel AFB ein rechter als Winkel im Halbkreise, und nach §. 170 ist das Quadrat der

Cathete AF so groß als ein Rechteck, welches zur einen Seite die ganze Hypotenuse AB und zur andern Seite den anliegenden Abschnitt AE = AD hat.

§. 177. Aufgabe.

Ein beliebiges Vieleck in ein Quadrat zu verwandeln.

Aufl. Man verwandle das Vieleck zuerst nach §. 175 in ein Dreieck, dieses nach §. 176 in ein Rechteck und endlich nach dem letzten §. das Rechteck in ein Quadrat.

§. 178 und 179. Aufgabe.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches der Summe oder dem Unterschiede zweier gegebenen Quadrate gleich ist.

Aufl. Um ein Quadrat zu erhalten, welches so groß ist, als zwei gegebene Quadrate zusammen, zeichne ich ein rechtwinkliges Dreieck, welches zu Catheten die Seiten der gegebenen Quadrate hat; dann ist die Hypotenuse die Seite des gesuchten Quadrats, welches der Summe der gegebenen Quadrate gleich ist. — Wenn aber das gesuchte Quadrat dem Unterschiede der gegebenen Quadrate gleich sein soll, so zeichne ich ein rechtwinkliges Dreieck, welches zu einer Cathete die Seite des kleineren Quadrates und zur Hypotenuse die Seite des größeren Quadrates hat; dann ist die andere Cathete die Seite des gesuchten Quadrates.

Uebungsaufgaben.

Aufgabe 233 — 236. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so daß die Grundlinie ungeändert bleibt und das zu zeichnende Dreieck

233) gleichschenklig wird;

234) an der Grundlinie einen Winkel von vorgeschriebener Größe hat;

235) eine gegebene Linie zur Seite hat (zwei Auflösungen);

236) einen gegebenen Winkel zum Winkel an der Spitze hat.

Aufgabe 237 — 238. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so daß ein Winkel an der Grundlinie bleibt, und

237) die Grundlinie einer gegebenen Linie gleich wird;

238) die Höhe einer gegebenen Linie gleich wird.

Aufgabe 239 — 240. Dieselben Aufgaben für das Parallelogramm.

Aufgabe 241 — 242. Ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, so daß

241) eine Seite einer gegebenen Linie gleich wird *);

242) die Diagonale des Rechtecks einer gegebenen Linie gleich wird.

Aufgabe 243 — 246. Es ist ein Quadrat gegeben; man soll ein Quadrat zeichnen, welches

243) doppelt so groß ist;

244) halb so groß ist;

245) dreimal so groß ist;

246) fünfmal so groß ist, als das gegebene Quadrat, u. dgl. m.

---

*) Diese Aufgabe läßt besonders viele verschiedene Auflösungen zu, z. B. bei Benutzung von §. 163, 168, 170 u. a. m.

Aufgabe 247. Ein gegebenes Dreieck in ein rechtwinkliges Dreieck mit einer gegebenen Hypotenuse zu verwandeln.

Aufgabe 248. Ein Dreieck in ein anderes mit einer gegebenen Grundlinie und einem gegebenen Winkel an der Spitze zu verwandeln.

Aufgabe 249. In einen gegebenen Kreis ein Rechteck zu zeichnen, welches einem gegebenen Quadrate gleich ist.

Aufgabe 250. Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu zeichnen, welcher einem gegebenen Quadrate gleich ist.

Anm. Auch folgende Aufgaben sind nicht schwierig zu lösen:

Ein Parallelogramm, ein Trapez oder ein Dreieck durch Linien, welche von einem auf einer Seite (beim Trapez auf einer der parallelen Seiten) gegebenen Punkte ausgehen, in zwei, drei u. s. w. gleiche Theile zu theilen.

Bemerkung. Alle Untersuchungen, welche wir in den vorhergehenden Abschnitten über räumliche Größen: Linien, Winkel und Figuren, angestellt haben, beschäftigen sich mit der einfachen Frage, ob zwei Größen gleich oder ungleich sind. Der erste Fall bietet keine Mannigfaltigkeit dar. Wenn das eine Mal die Größe $A = B$ und ein anderes Mal $C = D$ gegeben ist, so findet zwischen A und B gerade dieselbe Beziehung statt, wie zwischen C und D. Wenn dagegen $A > B$ und $C > D$ gegeben ist, so ist hiermit noch keineswegs ausgesagt, daß zwischen A und B gerade die nehmliche Verschiedenheit stattfindet, wie zwischen C und D; es ist möglich, daß die Größe A die Größe B eben so oft, als die Größe C die Größe D enthält; es kann aber auch eine solche Gleichheit der beiderseitigen Verhältnisse nicht vorhanden sein.

Da jedes Verhältniß durch zwei Zahlen bestimmt wird, so gehört das Verhältniß selbst (seinem Zahlenwerthe nach) der Arithmetik an und kann keinen Gegenstand der Geometrie bilden. Die Geometrie kann aber wohl wieder das Verhältniß zweier räumlichen Größen mit dem zweier anderen in sofern vergleichen, als sie untersucht, ob das Verhältniß des einen Paares dem des andern Paares gleich sei oder nicht, z. B. ob zwei Kreisbogen sich wie die zugehörigen Centriwinkel verhalten oder nicht. Durch diese Vergleichung entsteht die Proportion. Zu jeder Proportion gehören aber zwei Verhältnisse, also vier räumliche Größen; in der Proportion werden auf einmal (in einer bestimmten Beziehung) vier räumliche Größen mit einander verglichen. Wir werden es daher im Folgenden mit einer bei Weitem weniger einfachen Vergleichung der räumlichen Größen zu thun haben, als in den vorhergehenden Abschnitten.

Die Sätze von der Proportionalität der räumlichen Größen zerfallen aber von selbst wieder in zwei Abschnitte, je nachdem sie bloß Linien oder Linien und (begrenzte) Flächen betreffen.

Achter Abschnitt.

Von den Verhältnissen der Linien.

A. Arithmetische Hilfssätze.

§. 180. Bemerkung.

Diejenigen Sätze der Arithmetik und allgemeinen Größenlehre, welche für das richtige Verständniß dieses und des folgenden Abschnittes unentbehrlich sind und hier als bekannt vorausgesetzt werden, sind folgende:

1. Erklärung. Eine Größe durch eine andere messen, heißt untersuchen, wie oft die eine in der andern enthalten ist. Die Größe, mit welcher man mißt, heißt die Einheit oder das Maaß, und die ganze oder gebrochene Zahl, welche durch das Messen gefunden wird, welche also anzeigt, wie oft die Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist, wird die Maaßzahl genannt.

2. Erklärung. Wenn man zwei gleichartige Größen, z. B. die Linien A und B (Fig. 117), durch eine dritte C gemessen und so die Maaßzahlen 5 und 3 gefunden hat, so sagt man: die Größen A und B verhalten sich wie ihre Maaßzahlen 5 und 3 und drückt dieses in Zeichen so aus: $A : B = 5 : 3$.
Umgekehrt, wenn man sagt, daß sich die Größe A zu B wie 5 zu 3 verhalte, so heißt dieses, daß es eine dritte Größe giebt, welche in A 5mal und in B 3mal enthalten ist.

Den Bruch 5:3 nennt man das Verhältniß der beiden Größen A und B; überhaupt versteht man unter dem Verhältniß zweier Größen den Bruch, der entsteht, wenn man die Maaßzahlen zweier Größen durch einander dividirt, — wobei vorausgesetzt ist, daß beide Größen durch die nehmliche Einheit gemessen sind.

3. Erklärung. Eine Gleichung zwischen zwei Brüchen heißt eine Zahlenproportion, z. B. $6 : 8 = 9 : 12$,
und eine Gleichung zwischen zwei Größen-Verhältnissen heißt eine Größenproportion, z. B. 6 ℔ : 8 ℔ = 9 Thlr : 12 Thlr.

Man unterscheidet Vorder- und Hinterglieder, innere und äußere Glieder.

4. Zusatz. In einer Größenproportion müssen natürlich die Glieder, welche ein Verhältniß bilden, gleichartig sein; dagegen können die Glieder des einen Verhältnisses mit denen des andern Verhältnisses gleichartig und ungleichartig sein. So sind z. B. in der Proportion

5 Fuß : 10 Fuß = 8 Fuß : 16 Fuß

alle Glieder gleichartig, dagegen in der Proportion

12 Ellen : 10 Ellen = 18 ℔ : 15 ℔

ist nur das erste Glied mit dem zweiten und das dritte mit dem vierten gleichartig.

5. Zusatz. Jede Größenproportion läßt sich in eine Zahlenproportion verwandeln, wenn man statt der Größen ihre Maaßzahlen setzt; — und umgekehrt kann man jede Zahlenproportion in eine richtige Größenproportion verwandeln, wenn man statt der Zahlen solche Größen setzt, welche diese

Zahlen zu Maaßzahlen haben, wobei natürlich in beiden Fällen vorausgesetzt ist, daß die Größen, welche ein Verhältniß bilden, durch die nehmliche Einheit gemessen sind. Zur Erläuterung des eben Gesagten können die beiden Beispiele von Nro. 3 dienen.

6. Erklärung. Eine Proportion, in welcher die Mittelglieder einander gleich sind, heißt eine stetige Proportion, und das gleiche Mittelglied wird die mittlere Proportionale zwischen den beiden äußeren Gliedern genannt. — Eine stetige Zahlenproportion ist z. B. folgende:

$$4 : 6 = 6 : 9.$$

7. Lehrsatz. In jeder Zahlenproportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkte der inneren Glieder; so ist z. B. in der Proportion $12 : 9 = 8 : 6$
das Produkt $12 . 6 = 9 . 8$ *).

8. Lehrsatz. In jeder Zahlenproportion lassen sich die Vorder- und Hinterglieder vertauschen. — So erhält man, z. B. aus der eben angeführten Proportion, durch Vertauschung der Vorder- und Hinterglieder die ebenfalls richtige Proportion $9 : 12 = 6 : 8$.

9. Lehrsatz. In jeder Proportion lassen sich die inneren Glieder vertauschen. — Ist z. B. wie oben

$$12 : 9 = 8 : 6$$

gegeben, so entsteht durch Vertauschung der Mittelglieder die ebenfalls richtige Proportion $12 : 8 = 9 : 6$.

10. Lehrsatz. 1) Ist in einer Zahlenproportion das erste Glied größer, eben so groß oder kleiner, als das zweite, so ist auch das dritte Glied größer, eben so groß oder kleiner, als das vierte; und wenn

2) das erste Glied größer, eben so groß oder kleiner, als das dritte ist, so ist auch das zweite Glied größer, eben so groß oder kleiner, als das vierte.

11. Lehrsatz. In jeder Zahlenproportion verhält sich die Summe oder Differenz des ersten und zweiten Gliedes zum zweiten, wie die Summe oder Differenz des dritten und vierten Gliedes zum vierten. So folgt z. B.
aus der Proportion $12 : 9 = 8 : 6$
weiter $12 + 9 : 9 = 8 + 6 : 6$,
d. h. $21 : 9 = 14 : 6$,
und $12 - 9 : 9 = 8 - 6 : 6$,
d. h. $3 : 9 = 2 : 6$.

12. Lehrsatz. In jeder Zahlenproportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede. So folgt z. B. aus der obigen
Proportion $12 : 9 = 8 : 6$
weiter $12 + 8 : 9 + 6 = 12 : 9$,
d. h. $20 : 15 = 12 : 9$,
und $12 - 8 : 9 - 6 = 12 : 9$,
d. h. $4 : 3 = 12 : 9$.

13. Zusatz. Sind mehrere Verhältnisse als gleich gegeben, so verhält sich auch die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede. — Ist z. B. gegeben:

---

*) Die Beweise dieses und der folgenden Sätze finden sich in jedem Lehrbuche der Arithmetik. (Thl. I, §. 156 u. f.)

$$3:5 = 6:10 = 9:15,$$

so verhält sich auch

$$3+6+9:5+10+15 = 3:5,$$

d. h.

$$18:30 = 3:5.$$

14. Lehrsatz. Wenn zwei Proportionen in drei Gliedern, welche in denselben gleiche Stellen einnehmen, übereinstimmen, so sind auch die vierten Glieder in beiden Proportionen einander gleich. — Denn wenn sich z. B.

verhält $a:b = c:d$

und $a:b = c:f$,

so verhält sich auch $c:d = c:f$;

folglich ist nach Nro. 10 $d = f$.

15. Lehrsatz. Die vorhergehenden Sätze von Zahlenproportionen gelten (vermöge Nro. 5) auch von Größenproportionen, mit Ausnahme jedoch von Nro. 7, da es ja ungereimt sein würde, Größen mit einander zu multipliziren; und Nro. 9, 12 und 13 gelten natürlich nur in dem Falle von Größenproportionen, wenn die Glieder sämmtlicher Verhältnisse gleichartig sind.

16. Erklärung. Im Vorhergehenden ist durchgehends angenommen, daß zwei Größen, welche ein Verhältniß bilden, sich wirklich durch eine dritte Größe ohne Rest messen lassen; dergleichen Größen nennt man commensurabel. Gleichartige Größen können aber auch incommensurabel sein, d. h. es ist nicht möglich, beide durch eine und dieselbe dritte Größe zu messen, indem jede Größe, welche in der einen aufgeht, in der andern einen Rest läßt. Das Verhältniß incommensurabler Größen kann daher auch nie genau, sondern nur näherungsweise in Zahlen ausgedrückt werden, d. h. es lassen sich nur Zahlen angeben, welche entweder größer oder kleiner sind, als das gesuchte Verhältniß. Diese Grenzen können jedoch allemal einander beliebig genähert, d. h. so bestimmt werden, daß ihr Unterschied kleiner wird, als jede noch so kleine gegebene Zahl. — Eine Zahl, welche selbst nicht darstellbar ist, für welche sich nur beliebig enge Grenzen angeben lassen, zwischen denen sie liegt, nennt man in der Arithmetik eine irrationale Zahl, während alle wirklich darstellbaren Zahlen rational heißen. — Das Verhältniß zweier incommensurablen Größen ist also irrational und zwei irrationale Verhältnisse heißen gleich, wenn sie beständig zwischen denselben Grenzen liegen, wie auch immer diese Grenzen einander genähert werden.

So wie aber sämmtliche Sätze der Arithmetik auch dann noch richtig bleiben, wenn man sie auf irrationale Zahlen anwendet, so gelten ins Besondere die im Vorhergehenden aufgeführten Sätze der Verhältnisse und Proportionen auch von den irrationalen Verhältnissen incommensurabler Größen.

Anm. Incommensurable Linien sind z. B. die Seite und die Diagonale eines Quadrats, indem das Verhältniß derselben $= 1:\sqrt{2}$ ist *); und es ist daher niemals möglich, eine dritte Linie zu finden, welche in beiden aufgeht. Theilt man z. B. die Seite eines Quadrats in zehn gleiche Theile und mißt mit einem solchen Theile die Diagonale, so findet man, daß derselbe in der Hypotenuse mehr als 14-, aber weniger als 15mal enthalten ist. Das Verhältniß zwischen Diagonale und Seite liegt also zwischen den Grenzen $14:10$ und $15:10$ oder 1,4 und 1,5. Theilt man nun, um dasselbe in engere Grenzen einzuschließen, den zehnten Theil der Seite wieder in zehn

---

*) Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist $d^2 = 2x^2$ (Fig. 172), also $d^2:x^2 = 2:1$ und folglich $d:x = \sqrt{2}:1 = 1{,}4142\ldots$

gleiche Theile und mißt mit einem dieser Theile, welcher also in der Seite selbst hundertmal enthalten ist, denjenigen Rest, welcher geblieben ist, nachdem man den zehnten Theil der Seite auf die Diagonale vierzehnmal aufgetragen hatte, so findet man, daß dieser hunderte Theil der Seite in dem Reste mehr, als einmal, aber weniger, als zweimal, also in der Diagonale selbst mehr, als 141 und weniger, als 142 mal enthalten ist. Das Verhältniß der Diagonale zur Seite liegt also zwischen den engeren Grenzen 141 : 100 und 142 : 100 oder 1,41 und 1,42. Auf diese Art fortfahrend, kann man das gesuchte Verhältniß in immer engere Grenzen einschließen; aber niemals wird man dahin gelangen, dasselbe vollständig auszudrücken; in wie viel Theile man auch immer die Seite eines Quadrats theilen mag, niemals wird einer dieser Theile in der Diagonale ohne Rest aufgehen.

B. Proportionalität der Linien, welche von parallelen Linien durchschnitten werden.

§. 181. Lehrsatz.

Wenn eine Linie DE die Seiten eines Dreiecks ABC (Fig. 118) durchschneidet und mit der Grundlinie BC parallel ist, so verhalten sich

1) die oberen Abschnitte wie die unteren:

$$AD : BD = AE : CE,$$

2) die oberen Abschnitte wie die ganzen Seiten:

$$AD : AB = AE : AC,$$

3) die unteren Abschnitte wie die ganzen Seiten:

$$BD : AB = CE : AC.$$

Beweis. Ich bestimme zunächst das Verhältniß von AD zu BD und nehme an, es verhalte sich

$$AD : BD = 4 : 3;$$

dann giebt es eine dritte Linie, welche in AD viermal und in BD dreimal enthalten ist. Diese Linie trage ich auf AD viermal und auf BD dreimal auf und ziehe durch die Theilungspunkte Parallelen mit der Grundlinie BC. Dann theilen diese Linien auch AE in vier und CE in drei gleiche Theile, nach dem Satze: Wenn mehrere parallele Linien von einer schneidenden Linie gleiche Stücke abschneiden, so theilen sie auch jede andere schneidende Linie in gleiche Theile.

Demnach verhält sich

$$AE : CE = 4 : 3.$$

Nach der Annahme verhielt sich auch

$$AD : BD = 4 : 3,$$

folglich ist: 1) $AD : BD = AE : CE.$

Weiter verhält sich $AD : AB = 4 : 7$

und auch $AE : AC = 4 : 7,$

folglich ist 2) $AD : AB = AE : AC.$

Ferner verhält sich $BD : AB = 3 : 7$

und auch $CE : AC = 3 : 7,$

folglich ist 3) $BD : AB = CE : AC$ *).

*) Man kann in dem so eben angeführten Beweise auch statt der bestimmten Zahlen 4, 3 und 7 die allgemeinen Zeichen m, n und m+n setzen, alles Andere aber wörtlich beibehalten und so dem Beweise das Ansehen größerer Allgemeinheit geben.

Anm. 1. Die Proportionen (2) und (3) konnten auch aus (1) mit Hilfe von Nro. 11 in §. 180 abgeleitet werden.

Anm. 2. Wir haben bei dem Beweise des vorhergehenden Satzes angenommen, daß AD und DB commensurabel sind. Sollte dieses nicht der Fall sein, so wird sich weder das Verhältniß AD : DB, noch AE : EC in Zahlen genau ausdrücken lassen, und man wird sich darauf beschränken müssen, zu zeigen, daß diese Verhältnisse allemal zwischen denselben Grenzen liegen. — Um dieses darzuthun, theile man AD (Fig. 119) in eine beliebige Anzahl, z. B. in m gleiche Theile, und nenne einen dieser Theile der Kürze wegen α. Da AD und BD incommensurabel sind, so kann der Theil α in BD nicht aufgehen; angenommen er lasse sich auf BD nmal auftragen, und es bliebe dann noch ein Rest, welcher kleiner ist, als α; so wird, wenn wir α nochmals auftragen, sein Endpunkt F über B hinausfallen. Da nun AD $= m\alpha$ und BD $> n\alpha$, aber $< (n+1)\alpha$ ist, so ist folglich

$$\frac{BD}{AD} > \frac{n}{m}, \text{ aber } \frac{BD}{AD} < \frac{n+1}{m}.$$

Ziehen wir nun durch die Theilungspunkte der Linie AB und durch den Punkt F Parallelen mit der Grundlinie BC, so werden auch auf AC gleiche Stücke abgeschnitten, und wenn wir einen solchen Theil β nennen, so ist AE $= m\beta$ und EC $> n\beta$, aber $< (n+1)\beta$, folglich $\frac{CE}{AE} > \frac{m}{n}$, aber $\frac{CE}{AE} < \frac{n+1}{m}$.

Es liegen also beide Verhältnisse BD : AD und CE : AE zwischen den nehmlichen Grenzen n : m und n + 1 : m, und da dieses immer stattfindet, in wie viele Theile man auch AD theilen mag, so sind die beiden irrationalen Verhältnisse einander gleich, also

$$BD : AD = CE : AE.$$

§. 182. Zusatz.

Es verhält sich auch die Grundlinie des abgeschnittenen Dreiecks (DE) zur Grundlinie des gegebenen Dreiecks (BC), wie ein oberer Abschnitt (AD) zur ganzen Seite (AB, Fig. 120).

Beweis. Man ziehe durch D mit AC eine Parallele DF und denke sich AC als Grundlinie, AB und BC aber als Seiten des Dreiecks ABC; dann sind AD und CF die unteren Abschnitte. Nach §. 181, 3 verhalten sich die unteren Abschnitte wie die ganzen Seiten, also

$$CF : AD = BC : AB.$$

Statt CF kann man aber auch DE setzen, weil diese als gegenüberstehende Seiten im Parallelogramm DECF einander gleich sind; also verhält sich auch

$$DE : AD = BC : AB, \text{ w. z. e. w.}$$

§. 183. Lehrsatz.

Eine Linie, welche die Seiten eines Dreiecks in proportionirte Stücke theilt, ist der Grundlinie parallel.

Beweis. Es verhalte sich in Figur 121

$$AD : AB = AE : AC,$$

so ist DE || BC zu erweisen.

Wir führen diesen Beweis indirekt und nehmen an, DE sei mit BC nicht parallel, so wird sich durch D eine andere Linie DF parallel BC ziehen lassen. Wenn nun DF mit BC parallel wäre, so müßte sich nach §. 181, 2 verhalten $AD : AB = AF : AC.$

Nach der Voraussetzung verhält sich aber

AD : AB = AE : AC,

und es müßte daher vermöge §. 180, 14 AF = AE sein. Demnach kann nicht DF, sondern allein DE mit BC parallel sein.

§. 184. Lehrsatz.

1) Wenn man in einem Trapeze ABCD (Fig. 122) eine Linie EF mit den parallelen Seiten AB und CD parallel zieht, so theilt diese die nicht parallelen Seiten AD und BC in proportionirte Stücke, und umgekehrt

2) eine Linie EF, welche die nicht parallelen Seiten eines Trapezes ABCD in proportionirte Stücke theilt, ist mit den parallelen Seiten parallel.

Der Beweis für die erste dieser beiden Behauptungen ist vermöge §. 117 ganz derselbe, wie von §. 181; hieraus folgt aber die zweite Behauptung eben so auf indirektem Wege, wie sich die Richtigkeit des vorhergehenden §. aus §. 181 ergeben hat.

Anm. Von den vorhergehenden allgemeineren Sätzen §. 181 und 184 sind die §§. 114 und 116 besonders merkwürdige Fälle.

§. 185, a. Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Linien AC und DF von drei von einem Punkte G ausgehenden Linien (Strahlen) GD, GE und GF (Fig. 123) durchschnitten werden, so sind die abgeschnittenen Stücke proportionirt; es verhält sich nehmlich

AB : DE = BC : EF.

Beweis. Da die Linie AC mit DF parallel vorausgesetzt ist, so verhält sich nach §. 182 in dem Dreiecke GDE

AB : DE = GB : GE

und in dem Dreiecke GEF

BC : EF = GB : GE;

folglich verhält sich auch AB : DE = BC : EF.

*§. 185, b. Zusatz.

Drei convergente Linien, welche von zwei parallelen Linien proportionirte Stücke abschneiden, schneiden sich selbst in dem nehmlichen Punkte.

Beweis. Angenommen es wäre möglich, daß die Linien AD, BE und LF (Fig. 123), deren Verlängerungen sich in drei Punkten G, H und K durchschneiden, von den Parallelen AC und DF proportionirte Stücke abschnitten, so daß sich also verhielte

AB : DE = BL : EF,

so verbinde man den Punkt G, in welchem sich zwei Secanten schneiden, mit dem Punkte F, in welchem die dritte Secante die eine Parallele schneidet; dann verhält sich nach dem vorhergehenden §.

AB : DE = BC : EF.

Nach der Annahme soll sich aber verhalten

AB : DE = BL : EF;

folglich müßte nach §. 180, 14 BC = BL sein.

Anm. In Figur 123 werden die drei von G ausgehenden Strahlen von den beiden Parallelen an der nehmlichen Seite des Punktes G durchschnitten. Die beiden vorhergehenden Sätze lassen sich jedoch eben so leicht als richtig erweisen, wenn der Punkt G zwischen den beiden Parallelen liegt, also die eine der Parallelen die über G fortgesetzten Verlängerungen der in der Figur 123 verzeichneten Strahlen GD, GE und GF durchschneidet. Ferner bleiben jene Sätze auch dann noch richtig, wenn die Punkte A, B und C und eben so die Punkte D, E und F nicht in einer geraden, sondern in einer gebrochenen Linie liegen, jedoch so, daß AB || DE und BC || EF ist.

§. 186. Lehrsatz.

Die Linie CD, welche den Winkel an der Spitze eines Dreiecks ABC (Fig. 124) halbirt, theilt die Grundlinie AB in zwei Stücke, welche sich wie die anliegenden Seiten verhalten, nehmlich

$$AD : BD = AC : BC.$$

Beweis. Man ziehe durch A eine Parallele zu CD, welche die verlängerte BC in E schneidet. Dann ist Winkel $m = o$, als Wechselwinkel, und $n = p$, als Gegenwinkel bei parallelen Linien, und da $m = n$ vorausgesetzt ist, so ist auch $o = p$, folglich $CE = AC$. — Wenn wir nun in dem Dreiecke ABE die Seite AE als Grundlinie annehmen, so verhalten sich, da CD || AE ist, die unteren Abschnitte wie die oberen, also

$$AD : BD = CE : BC,$$

oder da ich statt CE auch AC setzen kann:

$$AD : BD = AC : BC.$$

Anm. 1. Im gleichschenkligen Dreiecke halbirt die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze auch die Grundlinie; im ungleichschenkligen Dreiecke theilt sie die Grundlinie in zwei ungleiche Theile und zwar ist zu Folge des eben erwiesenen Satzes derjenige Theil der größere, welcher an der größeren Seite liegt.

Anm. 2. Auch der umgekehrte Satz ist richtig: — Eine Linie, welche von der Spitze eines Dreiecks ausgeht, halbirt den Winkel an der Spitze, wenn sie die Grundlinie in zwei Stücke zerschneidet, welche sich wie die anliegenden Seiten verhalten, wenn sich nehmlich verhält $AD : DB = AC : BC$.
Denn wenn wir AE || CD ziehen, so verhält sich auch

$$AD : DB = CE : BC;$$

folglich ist $AC = CE$ und daher Winkel $o = p$. Wegen CD || AE ist aber Winkel $m = o$ und $n = p$, also auch $m = n$.

C. Von der Aehnlichkeit gradliniger Figuren, ins Besondere der Dreiecke.

Bemerkung. Wenn man in einem Dreiecke ABC (Fig. 125) mit einer Seite BC eine Parallele DE zieht, so stimmt das Dreieck ADE mit ABC, wie man leicht sieht, in allen Winkeln und vermöge §. 181 u. 182 auch im Verhältnisse der Seiten überein. Wir werden daher mit Recht behaupten können, daß diese beiden Dreiecke, welche nur in der Größe verschieden sind, einerlei Gestalt haben, also ähnlich sind. — Verallgemeinern wir das so eben Gesagte, so erhalten wir die folgende Erklärung.

§. 187. Erklärung.

Zwei Vielecke sind ähnlich ($\sim$), wenn sie in allen Winkeln und in dem Verhältnisse der gleichliegenden (d. h. gleiche Winkel einschließenden) Seiten übereinstimmen.

Anm. Wenn das Vieleck ABCDEF ∾ abcdef (Fig. 130) sein soll, so muß Winkel A = a, B = b, C = c, D = d, E = e und F = f sein, ferner muß sich verhalten

$$AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EF : ef = FA : fa;$$

also wenn z. B. ab = $^3/_5$AB ist, so muß auch bc = $^3/_5$BC, cd = $^3/_5$CD, de = $^3/_5$DE, ef = $^3/_5$EF und fa = $^3/_5$FA sein.

§. 188. Zusatz.

1) Zwei Vielecke, welche einem dritten ähnlich sind, sind auch unter sich ähnlich.

2) Congruente Vielecke sind auch ähnlich.

3) Alle gleichseitigen Dreiecke, alle Quadrate, überhaupt alle regelmäßigen Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich.

4) Da wir uns den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten denken, so sind auch alle Kreise einander ähnlich.

5) Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie ein Paar gleichliegende Seiten. Wenn nehmlich Vieleck ABCDE ähnlich ist abcde (Fig. 130), so verhält sich

$$AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea,$$

folglich auch nach §. 180, 13

$$AB + BC + CD + DE + EA : ab + bc + cd + de + ea = AB : ab.$$

§. 189. Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreiecke ABC mit der Grundlinie BC eine Parallele DE zieht, so ist das abgeschnittene Dreieck ADE dem ganzen Dreiecke ABC ähnlich (Fig. 125).

Beweis. Die Dreiecke ABC und ADE stimmen erstens in allen Winkeln überein. Denn Winkel A ist gemeinschaftlich und Winkel B = D und C = E, weil DE || BC ist. — Zweitens stimmen sie auch im Verhältnisse der gleichliegenden Seiten überein. Denn nach §. 181 verhält sich

$$AB : AD = AC : AE$$

und nach §. 182: $BC : DE = AB : AD.$

Folglich ist △ ABC ∾ ADE.

Bemerkung. Wenn man in den Congruenzsätzen der Dreiecke (§. 70, 73, 75 und 77) da, wo die Uebereinstimmung in der Größe zweier oder aller drei Seiten gegeben ist, nur Uebereinstimmung im Verhältnisse dieser Seiten annimmt, und folglich in §. 73 ins Besondere, wo nur die Uebereinstimmung in der Größe einer Seite vorgeschrieben ist, diese Bedingung ganz wegläßt, die übrigen Bedingungen aber beibehält, so ergeben sich die folgenden Sätze der Aehnlichkeit.

§. 190. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke (ABC und abc, Fig. 126) sind ähnlich, wenn sie in der Größe zweier Winkel (A = a und B = b) übereinstimmen.

Beweis. Man schneide von AB vom Punkte A aus ab = AD ab und ziehe DE || BC. — Dann ist zunächst zu Folge des vorhergehenden §. das entstandene Dreieck ADE ∾ ABC, weil DE || BC ist. — Zweitens ist aber auch das Dreieck ADE dem Dreiecke abc congruent, weil es mit demselben in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmt; es ist nehmlich

ab = AD nach der Construction,
W. a = A nach der Voraussetzung
und b = D; denn Winkel D ist = B, weil DE || BC ist, und Winkel B ist = b vorausgesetzt;

---

folglich $\triangle$ abc $\cong$ ADE.
Da nun $\triangle$ abc $\cong$ ADE und $\triangle$ ADE $\sim$ ABC ist, so ist auch $\triangle$ abc $\sim$ ABC.

§. 191. Zusatz.

Zwei gleichschenklige Dreiecke sind schon dann ähnlich, wenn sie in dem Winkel an der Spitze oder einem Winkel an der Grundlinie übereinstimmen, weil durch den einen gegebenen Winkel auch die übrigen bestimmt sind.

§. 192. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke (ABC und abc, Fig. 126) sind ferner ähnlich, wenn sie in der Größe eines Winkels (A = a) und dem Verhältnisse der einschließenden Seiten (AB : ab = AC : ac) übereinstimmen.

Beweis. Man schneide (so wie im vorhergehenden §.) von AB vom Punkte A aus ab = AD ab und ziehe DE || BC. — Dann ist erstens nach §. 189 $\triangle$ ADE $\sim$ ABC. — Zweitens ist aber das Dreieck ADE dem Dreiecke abc congruent, weil es mit demselben in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmt, nehmlich

W. a = A nach der Voraussetzung,
ab = AD nach der Construction
und ac = AE; denn nach der Voraussf. verhält sich AB:ab = AC:ac, und wegen DE || BC verhält sich auch AB:AD = AC:AE; da nun nach der Constr. ab = AD ist, so ist nach §. 180, 14 auch ac = AE;

---

folglich $\triangle$ abc $\cong$ ADE.
Es war $\triangle$ ADE $\sim$ ABC; also ist auch $\triangle$ abc $\sim$ ABC.

§. 193. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke ABC und abc (Fig. 126) sind ferner ähnlich, wenn sie in dem Verhältnisse aller drei Seiten übereinstimmen, also wenn sich verhält

AB : ab = AC : ac = BC : bc.

Beweis. Man schneide wieder ab = AD von AB ab und ziehe DE || BC. Dann ist das Dreieck ADE dem Dreiecke ABC ähnlich, weil DE || BC ist, und dem Dreiecke abc congruent, weil es mit demselben in allen drei Seiten übereinstimmt; denn es ist

ab = AD nach der Construction,
ac = AE, { weil sich verhält nach der Voraussf. AB:ab = AC:ac und wegen DE || BC auch AB:AD = AC:AE,
bc = DE, { weil sich verhält AB:ab = BC:bc nach der Voraussf. und auch AB:AD = BC:DE wegen DE || BC;

---

folglich $\triangle$ abc $\cong$ ADE.
Da nun $\triangle$ ADE $\sim$ ABC bereits oben erwiesen ist, so ist auch $\triangle$ abc $\sim$ ABC.

*§. 194. Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke (ABC und abc, Fig. 127 und 128) in dem Verhältnisse zweier Seiten (AB : ab = AC : ac) und in der Größe eines Winkels (B = b), welcher einer dieser Seiten gegenüberliegt, übereinstimmen, so sind entweder auch die den anderen Seiten gegenüberliegenden Winkel (C und c) einander gleich und die Dreiecke folglich ähnlich, oder diese Winkel ergänzen sich zu einem Flachen.

Beweis. Wenn wir abermals AD = ab machen und DE || BC ziehen, so ist △ ADE ∾ ABC. Ferner ist in den Dreiecken abc und ADE

ab = AD nach der Construction,

ac = AE, { weil sich verhält AB : ab = AC : ac nach der Voraussſ.
und auch AB : AD = AC : AE wegen DE || BC;

und W. b = D, weil b = B vorausgesetzt und B = D ist wegen DE || BC.

Demnach stimmen die Dreiecke abc und ADE in zwei Seiten und dem der einen gegenüberliegenden Winkel überein, und folglich sind nach §. 77 entweder die den anderen gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel c und E gleich groß, oder diese Winkel ergänzen sich zu einem Flachen. Im ersten Falle ist das Dreieck abc ≌ ADE und folglich △ abc ∾ ABC; im andern Falle ergänzen sich auch die Winkel c und C zu einem Flachen.

*§. 195. Zusatz.

1) Zwei Dreiecke sind daher gewiß ähnlich, wenn sie in dem Verhältnisse zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Beweis. Denn in diesem Falle ist (nach §. 78) △ ADE nothwendig ≌ abc (Fig. 127) und folglich △ abc ∾ ABC.

2) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind folglich ähnlich, wenn sie im Verhältnisse der Hypotenuse und einer Cathete übereinstimmen.

§. 196. Lehrsatz.

In ähnlichen Dreiecken (ABC und abc, Fig. 129) verhalten sich die Höhen (CD und cd) wie die Grundlinien (AB und ab).

Beweis. Da Dreieck ABC ∾ abc vorausgesetzt ist, so ist auch

W. A = a;

ferner ist W. ADC = adc, als Rechte,

folglich △ ADC ∾ adc nach §. 190.

Demnach verhält sich CD : cd = AC : ac,

und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und abc verhält sich weiter

AC : ac = AB : ab,

folglich verhält sich auch CD : cd = AB : ab.

Anm. Sollten die Winkel A und a stumpf sein, so sind jedenfalls B und b spitz, und man wird dann den nehmlichen Beweis mit Benutzung der Dreiecke BDC und bdc führen können.

§. 197, a. Lehrsatz.

1) Wenn zwei Vielecke ABCDEF und abcdef (Fig. 130) einander ähnlich sind, und man zerschneidet dieselben durch Diagonalen aus gleichliegenden Ecken A und a gezogen in Dreiecke,

so sind auch die entstandenen Dreiecke ähnlich, nehmlich △ ABC ∾ abc, △ ACD ∾ acd, △ ADE ∾ ade, △ AEF ∾ aef.

Beweis. Die Dreiecke ABC und abc sind ähnlich, weil sie in einem Winkel und dem Verhältnisse der einschließenden Seiten übereinstimmen, nehmlich W. B = b und AB : ab = BC : bc, } weil die Vielecke ABCDEF und abcdef als ähnlich vorausgesetzt sind;

folglich △ ABC ∾ abc nach §. 192.

Die Dreiecke ACD und acd sind ebenfalls nach dem so eben angeführten Satze ähnlich; es ist nehmlich

1) W. ACD = acd, weil W. BCD = bcd wegen Aehnlichkeit der Vielecke und W. BCA = bca, da △ ABC ∾ abc ist.

2) AC : ac = CD : cd; denn da △ ABC ∾ abc erwiesen ist, so verhält sich AC : ac = BC : bc, und da die Vielecke als ähnlich vorausgesetzt sind, so verhält sich BC : bc = CD : cd, folglich verhält sich auch AC : ac = CD : cd. — Demnach ist

△ ACD ∾ acd, weil sie in einem Winkel und dem Verhältnisse der einschließenden Seiten übereinstimmen. —

Eben so können auch die übrigen Dreiecke als ähnlich erwiesen werden.

§. 197, b. Lehrsatz.

Zwei Vielecke ABCDEF und abcdef (Fig. 130) sind ähnlich, wenn sie durch Diagonalen aus einer Ecke gezogen in ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke zerschnitten werden.

Beweis. Wenn Dreieck ABC ∾ abc, ACD ∾ acd, ADE ∾ ade und AEF ∾ aef vorausgesetzt ist, so stimmen die Vielecke erstens in allen Winkeln überein; denn es ist

W. ABC = abc, weil △ ABC ∾ abc vorausgesetzt ist,
W. BCD = bcd, weil sie aus gleichen Stücken bestehen,

u. s. w. Zweitens stimmen die Vielecke auch im Verhältnisse der gleichliegenden Seiten überein. Es verhält sich nehmlich zunächst

AB : ab = BC : bc, weil △ ABC ∾ abc vorausgesetzt ist;

ferner verhält sich auch BC : bc = CD : cd; denn es verhält sich:

BC : bc = AC : ac, weil △ ABC ∾ abc vorausgesetzt ist;
und AC : ac = CD : cd, weil △ ACD ∾ acd vorausgesetzt ist;

folgl. auch BC : bc = CD : cd.

Eben so werden auch die Verhältnisse der übrigen gleichliegenden Seiten als gleich erwiesen.

Anm. Ueber ähnliche Vielecke überhaupt führen wir noch folgende leicht zu erweisende Sätze an:

1) Wenn man aus einem beliebigen Punkte O (Fig. 131) Linien nach sämmtlichen Ecken eines Vielecks ABCD zieht, dieselben nach einem gleichen Verhältnisse theilt oder rückwärts verlängert und die auf einander folgenden Theilungspunkte oder die Endpunkte der Verlängerungen durch gerade Linien verbindet, so erhält man dem gegebenen ähnliche Vielecke abcd und $\alpha\beta\gamma\delta$, deren Seiten den Seiten des gegebenen Vielecks im ersten Falle in derselben Folge, im zweiten Falle in umgekehrter Folge parallel sind.

2) Wenn die Seiten zweier ähnlichen Vielecke einander in gleicher oder entgegengesetzter Folge parallel sind, und man verbindet die correspondirenden Ecken durch gerade

Linien, so schneiden sich dieselben in dem nehmlichen Punkte. (Vergl. oben §. 185, b.) Dieser Punkt wird in Beziehung auf die gegebenen Vielecke Aehnlichkeitspunkt genannt.

3) Wenn man aus irgend einem Punkte gerade Linien nach beliebigen Punkten eines Kreises zieht und dieselben nach gleichem Verhältnisse theilt oder rückwärts verlängert, so liegen die Theilungspunkte oder die Endpunkte der Verlängerungen wieder auf einem Kreise.

4) Wenn zwei Kreise in einer Ebene gegeben sind und man zieht in denselben beliebige parallele Durchmesser und verbindet entweder die gleichliegenden oder die entgegengesetzten Endpunkte der parallelen Durchmesser durch gerade Linien, so schneiden sich dieselben in dem nehmlichen Punkte, welcher ein Aehnlichkeitspunkt der beiden gegebenen Kreise genannt wird. Man unterscheidet hiernach den äußeren und den inneren Aehnlichkeitspunkt. Bei zwei Kreisen, von denen der eine ganz außerhalb des andern liegt, schneiden sich die beiden gemeinschaftlichen Tangenten, welche die Kreise an der nehmlichen Seite berühren, im äußeren, und die beiden Tangenten, welche die Kreise an entgegengesetzten Seiten berühren, im inneren Aehnlichkeitspunkte. Sind die Kreise einander gleich, so rückt der äußere Aehnlichkeitspunkt in unendliche Entfernung hinaus.

§. 198. Lehrsatz.

1) In regelmäßigen Vielecken von gleicher Seitenzahl (z. B. in den regelmäßigen Fünfecken ABCDE und abcde, Fig. 132) verhalten sich die Radien der umschriebenen Kreise (AM und am) und die Radien der eingeschriebenen Kreise (FM und fm) wie ein Paar Seiten (z. B. AB und ab).

Beweis. Da die beiden regelmäßigen Vielecke ABCDE und abcde eine gleiche Seitenzahl haben, so ist Centriwinkel AMB = amb, folglich auch nach §. 191 das gleichschenklige Dreieck AMB $\sim$ amb, folglich verhält sich

$$AM : am = AB : ab$$

und vermöge §. 196 auch FM : fm = AB : ab.

2) Da bei zwei regelmäßigen Vielecken von gleicher Seitenzahl sich die Umfänge offenbar wie ein Paar Seiten verhalten, so müssen sich folglich diese Umfänge auch wie die Radien der umschriebenen oder eingeschriebenen Kreise verhalten, und wenn wir uns zwei Kreise als ähnliche regelmäßige Vielecke von unendlich vielen Seiten denken, so folgt hieraus:

3) Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie die Radien oder Durchmesser.

Anm. Wenn man also bei einem Kreise den Durchmesser verdoppelt oder verdreifacht, so wird auch die Peripherie verdoppelt oder verdreifacht.

§. 199. Lehrsatz.

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke ABC (Fig. 133) aus der Spitze des rechten Winkels C ein Loth CD auf die Hypotenuse AB fällt, so ist

$$\text{I.} \quad \triangle\, ACD \sim ABC,$$

denn Winkel A ist gemeinschaftlich und Winkel ADC = ACB, als rechte (folglich auch Winkel β = B).

$$\text{II.} \quad \triangle\, CBD \sim ABC,$$

denn Winkel B ist gemeinschaftlich und Winkel CDB = ACB, als rechte (folglich auch α = A).

III. $\triangle$ ACD $\sim$ CBD,

weil beide ähnlich dem Dreieck ABC erwiesen sind.

Da die Dreiecke ABC und ACD einander ähnlich sind, so verhalten sich in denselben die Hypotenusen AB und AC wie die den gleichen Winkeln B und β gegenüberliegenden Catheten AC und AD, also

IV. AB : AC = AC : AD,

d. h. die Cathete AC ist die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse AB und dem anliegenden Segmente AD.

Eben so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und CBD die Proportion V. AB : BC = BC : BD.

Da endlich auch noch die Dreiecke ACD und CBD einander ähnlich sind, so verhalten sich in denselben die den gleichen Winkeln β und B gegenüberliegenden Catheten AD und CD wie die den gleichen Winkeln A und α gegenüberliegenden Catheten CD und BD, also

VI. AD : CD = CD : BD,

d. h. das Loth CD ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Segmenten der Hypotenuse AD und BD.

Anm. In jeder Zahlenproportion ist bekanntlich das Product der inneren Glieder gleich dem Producte der äußeren Glieder. Denken wir uns daher in den Proportionen IV und V statt der Linien ihre Maaßzahlen gesetzt, so ergeben sich aus denselben folgende Gleichungen: $AC^2 = AB \,.\, AD$

und $BC^2 = AB \,.\, BD.$

Addiren wir diese Gleichungen, so erhalten wir weiter

$$AC^2 + BC^2 = AB \,.\, (AD + BD),$$

oder da AD + BD = AB ist:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Weiter unten (§. 219) werden wir sehen, daß der Inhalt eines Quadrats durch die zweite Potenz einer Seite ausgedrückt wird. Es liefert uns daher der obige Lehrsatz einen sehr einfachen Beweis des pythagoräischen Satzes.

D. Proportionen zwischen Linien in und am Kreise.

§. 200. Lehrsatz.

1) Wenn in einem Kreise zwei Sehnen AB und DE (Fig. 134) sich durchschneiden, so bilden die Abschnitte der einen (AF u. BF) die äußeren und die Abschnitte der andern (DF und EF) die inneren Glieder einer richtigen Proportion.

Beweis. Denn wenn man AE und BD zieht, so sind die entstandenen Dreiecke AEF und DBF ähnlich, weil sie in zwei Winkeln übereinstimmen, nehmlich

W. AFE = BFD, als Scheitelwinkel,

W. A = D, als Peripheriewinkel auf demselben Bogen BE,

folglich $\triangle$ AEF $\sim$ DBF.

Demnach verhält sich:

AF : DF = EF : BF, w. z. b. w.

2) Wenn von einem Punkte F (Fig. 135) außerhalb eines Kreises zwei Secanten AF und DF an denselben gezogen sind, so verhalten sich die ganzen Secanten AF und DF umgekehrt wie die äußeren Abschnitte DF und EF.

Beweis. Denn wenn wir AE und BD ziehen, so sind die entstandenen Dreiecke AEF und DBF ähnlich, weil sie in zwei Winkeln übereinstimmen, nehmlich

W. F = F,

W. A = D, als Peripheriewinkel auf demselben Bogen BE,

folglich △ AEF ∾ DBF,

demnach verhält sich:

AF : DF = EF : BF.

3) Wenn aus einem Punkte F (Fig. 136) außerhalb eines Kreises eine Tangente DF und eine Secante AF an einen Kreis gezogen sind, so ist die Tangente DF die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Secante AF und dem äußeren Abschnitte BF.

Beweis. Wenn man AD und BD zieht, so sind die entstandenen Dreiecke ADF und DBF ähnlich aus Gleichheit zweier Winkel, nehmlich

W. F = F,

W. FAD = BDF, denn der Winkel, welchen die Sehne mit der Tangente bildet, ist dem Winkel im entgegengesetzten Abschnitte gleich;

folglich △ ADF ∾ DBF;

demnach verhält sich

AF : DF = DF : BF.

E. Aufgaben.

§. 201, a. Aufgabe.

Zu drei gegebenen Linien a, b und c (Fig. 137) die vierte Proportionale x zu finden, so daß sich verhält

a : b = c : x.

(Die Analysis ist in §. 181, 1 enthalten.)

Aufl. Man zeichne einen beliebigen Winkel D (Fig. 137), schneide von dem einen Schenkel a = DE, von E aus b = EF und von dem andern Schenkel c = DG ab, ziehe ferner EG und damit durch den Punkt F die Parallele FH, so ist GH = x die gesuchte Linie nach §. 181, 1.

Anm. Andere Auflösungen ergeben §. 181, 2 und 3, §. 182, §. 185, a, und §. 200, 1 und 2.

§. 201, b. Aufgabe.

Eine gegebene Linie AB (Fig. *146) nach einem vorgeschriebenen Verhältnisse zu theilen, d. h. so zu theilen, daß die gesuchten Theile der Linie AB sich wie zwei andere gegebene Linien m und n verhalten.

Aufl. Durch den einen Endpunkt A der Linie AB ziehe man unter einem beliebigen Winkel eine Linie, trage auf dieselbe von A aus die Linie m = AD und von D aus n = DE auf, verbinde hierauf B mit E und ziehe durch D mit BE eine Parallele, welche die gegebene Linie AB im Punkte C schneidet; dann ist dieser Punkt der gesuchte Theilungspunkt.

Beweis. Denn da CD ∥ BE ist, so verhält sich

AC : BC = AD : DE = m : n.

Anm. Auch diese Aufgabe läßt so wie die vorhergehende mit Benutzung der in der Anmerkung angegebenen Paragraphen mehrere Auflösungen zu.

§. 202. Aufgabe.

Zu zwei gegebenen Linien a und b die mittlere Proportionale x zu finden, so daß sich also verhält

$$a : x = x : b.$$

Aufl. 1) (Die Analysis ist in §. 199, VI. enthalten. —) Man schneide von einer beliebigen Linie a = CD (Fig. 138) und von D aus b = DE ab, halbire CE in G, beschreibe um G über CE einen Halbkreis und errichte in D ein Loth, welches den Halbkreis in F trifft, so ist DF = x die mittlere Proportionale zwischen a und b.

Beweis. Denn wenn wir CF und EF ziehen, so ist Winkel CFE ein rechter, als Winkel im Halbkreise. Nach §. 199, VI. ist aber das Loth DF aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällt die mittlere Proportionale zwischen den beiden Segmenten CD und DE, also

$$a : x = x : b.$$

Aufl. 2) (Die Analysis ist in §. 199, IV. enthalten.) — Man ziehe eine Linie CD = a (Fig. 139), schneide von derselben CE = b ab, beschreibe über CD einen Halbkreis, errichte in E ein Loth, welches den Halbkreis in H trifft, und verbinde C mit H, so ist CH = x die mittlere Proportionale zwischen a und b.

Beweis. Denn wenn wir DH ziehen, so ist Winkel CHD ein rechter, als Winkel im Halbkreise. — Nach §. 199, IV. ist die Cathete CH die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse CD und dem der Cathete anliegenden Segmente CE, also

$$a : x = x : b.$$

Anm. Auch §. 200, 3 kann zur Auflösung benutzt werden.

§. 203. Aufgabe.

Ueber eine gegebene Linie ab (Fig. 126) ein Dreieck so zu zeichnen, daß es einem gegebenen Dreiecke ABC ähnlich wird, und die Seiten ab und AB in beiden eine gleiche Lage haben.

Aufl. Man trage an ab in den Endpunkten a und b die Winkel cab = CAB und cba = CBA an, so ist $\triangle$ abc $\sim$ ABC nach §. 190.

§. 204. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Linie ab (Fig. 130) ein Vieleck so zu zeichnen, daß es einem gegebenen Vielecke ABCDEF ähnlich wird, und die Linie ab mit der Seite AB eine gleiche Lage erhält.

Aufl. Man zerschneide das gegebene Vieleck ABCDEF, durch Diagonalen aus der Ecke A gezogen, in Dreiecke und mache nach dem vorhergehenden §. $\triangle$ abc $\sim$ ABC, so daß die Seiten ab und AB eine gleiche Lage erhalten; ferner mache man auf gleiche Weise $\triangle$ acd $\sim$ ACD, $\triangle$ ade $\sim$ ADE und $\triangle$ aef $\sim$ AEF; dann ist Vieleck ABCDEF $\sim$ abcdef nach §. 197, 2.

Uebungsaufgaben.

A. Dreiecks- und Vierecksaufgaben.

Aufgabe 251 — 261. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

251) zwei Winkel;

252) ein Winkel und das Verhältniß der einschließenden Seiten;

253) das Verhältniß aller drei Seiten;

254) das Verhältniß zweier Seiten und ein Winkel an der dritten (zwei Aufl.);

255) der Winkel an der Spitze und das Verhältniß zwischen Höhe u. Grundlinie;

256) der Winkel an der Spitze und das Verhältniß der Segmente;

257) der Winkel an der Spitze und das Verhältniß zwischen den aus den Endpunkten der Grundlinie auf die Seiten gefällten Lothe;

258) das Verhältniß der aus den drei Ecken auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Lothe;

259) der Unterschied der Winkel an der Grundlinie und das Verhältniß der gegenüberliegenden Seiten;

260) der Unterschied der Winkel an der Grundlinie und das Verhältniß der Segmente;

261) der Winkel an der Spitze und das Verhältniß zwischen der Halbirungslinie desselben und der Höhe.

Anm. In den vorstehenden elf Aufgaben, deren Zahl sich leicht noch um ein Beliebiges vergrößern ließe, wird durch die gegebenen Stücke nur die Gestalt des Dreiecks bestimmt. Die Aufgaben sind also sämmtlich unbestimmt. Fügen wir nun zu den die Gestalt bestimmenden Stücken noch irgend eine Linie, etwa eine der acht folgenden:

1) Grundlinie,
2) Höhe,
3) Mittellinie,
4) Halbirungslinie des Winkels an der Spitze,
5) Unterschied der Segmente,
6) Umfang,
7) Radius des umschriebenen Kreises,
8) Radius des eingeschriebenen Kreises u. dgl. m.

hinzu, so erhalten wir 88 bestimmte Aufgaben.

Aufgabe 262 — 264. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

262) die Höhe und die Mittellinie für eine Seite *);

263) die Höhe und das auf eine Seite aus der gegenüberstehenden Ecke gefällte Loth;

264) das auf eine Seite aus der gegenüberstehenden Ecke gefällte Loth und der Radius des eingeschriebenen Kreises.

Aufgabe 265 — 274 **). Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

265) die Grundlinie, die Mittellinie für dieselbe und die Mittellinie für eine Seite;

266) die Grundlinie und die Mittellinien für die Seiten;

267) die drei Mittellinien;

268) die Mittellinien für die beiden Seiten und die Höhe;

269) die Mittellinie und die aus den Endpunkten der Grundlinie auf die beiden Seiten gefällten Lothe (zwei Auflösungen);

270) die Mittellinie, die Höhe und das aus einem Endpunkte der Grundlinie auf die gegenüberliegende Seite gefällte Loth;

*270) die Höhe, die Mittellinie und der Winkel an der Spitze;

---

*) Die Linie, welche die Mitte einer Seite mit der gegenüberstehenden Ecke verbindet.

**) S. unten §. 228.

271) die Höhe, die Mittellinie für die Grundlinie und die Mittellinie für eine Seite;

272) der Winkel an der Spitze, die Mittellinie für die Grundlinie und die Mittellinie für eine Seite;

273) der Winkel an der Spitze und die Mittellinien für beide Seiten *);

274) der Winkel an der Spitze, die Höhe und die Mittellinie für eine Seite (zwei Auflösungen).

Aufgabe 275 — 278. Ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

275) eine Seite, die Winkel an der gegenüberliegenden Seite und die Winkel, welche diese Seite mit den beiden Diagonalen bildet;

276) eine Seite, die Winkel, welche die gegenüberliegende Seite mit den beiden Diagonalen bildet, und die Winkel, welche die beiden anderen Seiten mit einer Diagonale bilden;

277) eine Diagonale und die Winkel, welche die andere Diagonale mit den Seiten bildet;

278) eine Diagonale, drei Winkel des Vierecks und ein Winkel, welchen die andere Diagonale mit einer Seite bildet.

Anm. In diesen Aufgaben, welche sich leicht noch um ein Bedeutendes vermehren ließen, wird durch die vier gegebenen Winkel die Gestalt des Vierecks und durch Hinzufügung der einen Linie auch die Größe desselben bestimmt.

B. Vermischte Aufgaben.

Aufgabe 279. Eine Linie um ein gesuchtes Stück so zu verlängern, daß die Verlängerung und die ganze verlängerte Linie in einem vorgeschriebenen Verhältnisse stehen.

Aufgabe 280. Zwei gegebene Linien um ein gleiches Stück zu verlängern, so daß die ganzen verlängerten Linien ein vorgeschriebenes Verhältniß zu einander haben.

Aufgabe 281. Von zwei gegebenen Linien ein gleiches Stück abzuschneiden, so daß die übrig bleibenden Stücke in einem vorgeschriebenen Verhältnisse stehen.

Aufgabe 282 — 283. Zwischen den Schenkeln eines Winkels A ist ein Punkt P gegeben; man soll durch diesen Punkt eine die Schenkel des gegebenen Winkels in den Punkten X und Y schneidende Linie so legen, daß

282) die Abschnitte AX und AY ein vorgeschriebenes Verhältniß zu einander haben;

283) die Abschnitte PX und PY in einem vorgeschriebenen Verhältnisse zu einander stehen.

Aufgabe 284 — 285. Dieselben Aufgaben, jedoch mit der Abänderung, daß der Punkt P außerhalb der Schenkel des gegebenen Winkels liegt.

Aufgabe 286 — 287. Durch die Spitze C eines gegebenen Dreiecks ABC eine die Grundlinie AB nicht schneidende Linie so zu ziehen, daß, wenn man auf dieselbe aus den Endpunkten der Grundlinie A und B die Lothe AX und BY fällt:

286) die entstandenen Abschnitte CX und CY in einem vorgeschriebenen Verhältnisse zu einander stehen;

287) die Lothe AX und BY ein vorgeschriebenes Verhältniß zu einander haben.

Aufgabe 288 — 289. Dieselben Aufgaben, wie vorher, jedoch mit der Abänderung, daß die gesuchte Linie die Grundlinie AB durchschneiden soll.

---

*) Man gelangt zur Auflösung dieser Aufgabe, wenn man über der Mittellinie der einen Seite einen Kreisbogen beschreibt, welcher durch die Spitze des Dreiecks geht, und den Mittelpunkt dieses Bogens mit der Mitte der andern Seite und dem Endpunkte derselben, welchen sie mit der Grundlinie gemeinschaftlich hat, verbindet.

Aufgabe 290 — 292. In einem gegebenen Dreiecke ABC mit der Grundlinie AB eine Parallele, welche die Seiten in X und Y durchschneidet, so zu ziehen, daß

290) die Summe der Abschnitte AX + BY einer gegebenen Linie gleich wird;

291) der Unterschied dieser Abschnitte einer gegebenen Linie gleich wird;

292) das abgeschnittene Dreieck CXY einen vorgeschriebenen Umfang erhält;

*292) das Trapez ABYX einen vorgeschriebenen Umfang erhält.

Aufgabe 293 — 295. Dieselben Aufgaben, wie vorher, jedoch mit der Abänderung, daß die gesuchte Linie nicht die Seiten AC und BC selbst, sondern ihre über A und B fortgesetzten Verlängerungen schneiden soll.

Aufgabe *295. Durch den Durchschnittspunkt zweier Kreise eine Linie so zu ziehen, daß sie von beiden ähnliche Bogen abschneidet.

Aufgabe 296 — 297. Durch den Berührungspunkt A zweier gegebenen Kreise eine dieselben in X und Y treffende Linie so zu ziehen, daß

296) AX + AY einer gegebenen Linie gleich wird;

297) AX — AY einer gegebenen Linie gleich wird.

Aufgabe 298. In einen Kreis ein Rechteck zu zeichnen, in welchem zwei zusammenstoßende Seiten ein vorgeschriebenes Verhältniß haben.

Aufgabe 299. In einen Halbkreis ein Quadrat zu zeichnen.

Aufgabe *299. In einen gegebenen Kreisausschnitt ein Quadrat so zu zeichnen, daß eine Ecke in den Bogen, die drei anderen in die beiden Radien fallen.

Aufgabe 300. In ein gegebenes Dreieck ein Quadrat zu zeichnen (so, daß zwei Ecken auf die Grundlinie und die beiden anderen auf die Seiten des Dreiecks fallen).

Aufgabe 301. In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck zu zeichnen, in welchem zwei zusammenstoßende Seiten ein vorgeschriebenes Verhältniß bilden.

Aufgabe 302. In ein Quadrat ein Rechteck so zu zeichnen, daß die Ecken des Rechtecks auf die Seiten des Quadrats fallen, und zwei zusammenstoßende Seiten desselben ein vorgeschriebenes Verhältniß haben.

Aufgabe 303. In ein gegebenes Viereck einen Rhombus zu zeichnen, dessen Seiten den Diagonalen des Vierecks parallel laufen.

Aufgabe 304. In einem Dreiecke einen Punkt so zu bestimmen, daß seine Abstände von den drei Seiten in vorgeschriebenen Verhältnissen zu einander stehen.

Aufgabe 305 — 306. Einen Kreis zu zeichnen, welcher

305) durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene gerade Linie berührt;

306) zwei gegebene gerade Linien berührt und durch einen gegebenen Punkt geht*).

Neunter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und der Inhaltsberechnung der geradlinigen Figuren.

§. 205. Lehrsatz.

Rechtecke mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Beweis. Die gegebenen Rechtecke seien ABCD und EFGH (Fig. 140) mit den gleichen Höhen AD und EH; um nun zu zeigen, daß sich die beiden

*) Die Auflösung dieser Aufgabe läßt sich leicht auf die vorhergehende zurückführen.

Rechtecke wie ihre Grundlinien AB und EF verhalten, bestimme ich zuerst das Verhältniß dieser beiden Grundlinien und nehme an, es verhalte sich

$$AB : EF = 5 : 3,$$

d. h. es giebt eine dritte Linie, welche in AB fünfmal und in EF dreimal enthalten ist. Diese Linie trage ich nun auf AB und EF auf und ziehe durch die Theilungspunkte Parallelen mit den Höhen, so theilen diese das Rechteck ABCD in fünf und EFGH in drei kleinere Rechtecke, welche alle unter sich gleich sind, weil sie gleiche Höhe und Grundlinie haben. Demnach verhält sich Rechteck $ABCD : EFGH = 5 : 3.$

Nach unserer Annahme verhielt sich aber auch

$$AB : EF = 5 : 3;$$

folglich verhält sich $ABCD : EFGH = AB : EF.$

Anm. Um dem obigen Beweise das Ansehen größerer Allgemeinheit zu geben, kann man auch (so wie in §. 181) statt der bestimmten Zahlen die allgemeinen Zeichen m und n setzen, alles Andere aber ungeändert beibehalten. Eben so kann man sich auch durch dasselbe Verfahren, wie dort, von der Richtigkeit unseres Satzes überzeugen, wenn AB und EF incommensurabel sein sollten.

§. 206. Zusatz.

1) Rechtecke mit gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen; — denn in jedem Rechtecke lassen sich Höhe und Grundlinie vertauschen.

2) Parallelogramme oder Dreiecke mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien, und Parallelogramme oder Dreiecke mit gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen; — denn das Parallelogramm ist gerade so groß und das Dreieck halb so groß, als ein Rechteck, welches mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat.

*§. 207. Zusatz.

In jedem rechtwinkligen Dreiecke (ABC, Fig. 112) verhalten sich die Quadrate der Catheten zu einander und zu dem Quadrate der Hypotenuse wie die Segmente der Hypotenuse zu einander und zur ganzen Hypotenuse.

Beweis. Nach §. 170 ist das Quadrat ABFG = dem Rechtecke BLME und das Quadrat ACHK = dem Rechtecke CDML. Nun haben aber die beiden Rechtecke BLME und CDML und das Quadrat BCDE einerlei Höhe und verhalten sich daher wie ihre Grundlinien BL, CL und BC; folglich verhalten sich auch die drei Quadrate ABFG, ACHK und BCDE wie diese drei Linien.

§. 208. Erklärung.

Wenn man eine Figur durch eine andere als Einheit gemessen hat und dann die ausgemessene Figur (ihrer Größe nach) als benannte Zahl ausdrückt, so nennt man diese benannte Zahl den Inhalt der Figur. — Als Einheit nimmt man gewöhnlich ein Quadrat an.

Anm. Zu Folge dieser Erklärung ist also der Inhalt einer Figur (z. B. acht Quadratfuß) — so wie jede benannte Zahl — ein zusammengesetzter Ausdruck, in welchem sowohl angegeben ist, mit welcher Einheit (Quadratfuß) man die zu messende Figur verglichen hat, als auch, wie oft (achtmal) die Einheit in derselben enthalten ist.

Bemerkung. So wie Linien nur wieder durch Linien, so können auch natürlich Figuren nur durch Figuren gemessen werden. Während man jedoch Linien durch unmittelbares, wiederholtes Auftragen der Längeneinheit auszumessen pflegt, sucht man den Inhalt einer Figur in der Regel nicht durch unmittelbares Auftragen der Flächeneinheit (z. B. des Quadratfußes), sondern mittelbar dadurch zu erhalten, daß man bestimmte in der Figur vorkommende Linien wirklich durch die Längeneinheit (z. B. den Fuß) mißt und aus den Maaßzahlen dieser Linien die Zahl für den Inhalt der Figur berechnet. Die Regeln, nach welchen man hierbei zu verfahren hat, zu ermitteln, ist die Aufgabe dieses Abschnittes. — Hierbei wird jedoch durchgehends vorausgesetzt, daß man die Linien, welche die Größe einer Figur bestimmen, durch die Seite des als Flächeneinheit angenommenen Quadrats gemessen hat, und daß sich also die Maaßzahlen jener Linien auf diese Seite, als Längeneinheit, beziehen. (Wenn man also z. B. wissen will, wie viele Quadratfuß eine Figur enthält, so müssen auch die Linien, aus denen der gesuchte Inhalt berechnet werden soll, sämmtlich in Fußen, nicht z. B. die einen in Fußen, die anderen in Zollen ausgedrückt sein.)

Anm. Als Längeneinheit nimmt man gewöhnlich den preußischen oder rheinländischen Fuß an. Zwölf dieser Fuße bilden eine Ruthe. Den zwölften Theil des Fußes nennt man einen Zoll und den zwölften Theil des Zolles eine Linie. — Diese Eintheilung heißt die Duodecimaleintheilung und wird besonders im bürgerlichen Verkehr gebraucht (Werkmaaß). Eine andere Eintheilung, deren sich hauptsächlich die Feldmesser bedienen, ist die Decimaleintheilung, welche mit der vorhergehenden nur in der Größe der Ruthe übereinstimmt, in den übrigen Bestimmungen aber abweicht, indem hier die Ruthe in zehn Fuß, der Fuß in zehn Zoll, der Zoll in zehn Linien eingetheilt wird. — Bei beiden Eintheilungen bezeichnet man der Kürze wegen eine Ruthe, einen Fuß, einen Zoll, eine Linie

durch 1^0, $1'$, $1''$, $1'''$.

Die Flächen mißt man durch die Quadrate dieser Linien und bezeichnet eine Quadratruthe, einen Quadratfuß, einen Quadratzoll, eine Quadratlinie beziehlich durch

$$1\square^0, \quad 1\square', \quad 1\square'', \quad 1\square'''.$$

Es ist aber in der Duodecimaleintheilung

$$1\square^0 = 144\square', \quad 1\square' = 144\square'', \quad 1\square'' = 144\square'''$$

und in der Decimaleintheilung

$$1\square^0 = 100\square', \quad 1\square' = 100\square'', \quad 1\square'' = 100\square'''.$$

Die Decimaleintheilung hat vor der andern den Vorzug, daß das Geschäft des sogenannten Reducirens sich ohne alle Mühe ausführen läßt; so sind z. B. nach derselben

$$7^0\ 8'\ 3''\ 5''' = 7835''' = 783{,}5'' = 78{,}35' = 7{,}835^0$$

und $5\square'\ 37\square''\ 9\square''', = 53709\square''' = 537{,}09\square'' = 5{,}3709\square'$.

Will man Angaben nach der einen Eintheilung in die andere umsetzen, so hat man sich nur zu erinnern, daß für beide die Größe der Ruthe dieselbe ist.

Von anderen Maaßen, welche häufig Anwendung finden, ist eine preußische Elle $= 2^1/_8$ rheinl. Fuß $= 25^1/_2$ Zoll, eine preuß. Meile $= 2000$ Ruthen $= 24000$ rheinl. Fuß, eine Reisestunde, deren $5 = 3$ Meilen sind, $= 1200$ Ruthen $= 14400$ rheinl. Fuß, eine geographische Meile, deren 15 auf einen Grad des Aequators gehen, $= 23642$ rheinl. Fuß *), ein preuß. Morgen $= 180\ \square$Ruthen; — ferner ein

*) Im gewöhnlichen Leben ist auch noch häufig von einer deutschen Meile die Rede; soll diese einerlei sein mit der geographischen, so ist sie nicht, wie man oft be-

Meter = 3,186 rheinl. Fuß, ein Decimeter = $^1/_{10}$ Meter = 3,823 Zoll, ein Centimeter = $^1/_{100}$ Meter = 4,588 Linien, ein Millimeter = $^1/_{1000}$ Meter = 0,4588 Linien.

§. 209. Lehrsatz.

Die Zahl für den Inhalt eines Rechtecks wird gefunden, wenn man die Maaßzahl der Grundlinie mit der Maaßzahl der Höhe multiplicirt.

Wenn also z. B. die Seite des als Einheit angenommenen Quadrats Q (Fig. 148) in der Grundlinie des auszumessenden Rechtecks ABCD fünfmal und in der Höhe dreimal enthalten ist, so ist die Zahl für den gesuchten Inhalt $J = 3 . 5 = 15$;
oder allgemeiner, wenn überhaupt die Maaßzahlen der Grundlinie und Höhe durch g und h bezeichnet werden:

$$J = g . h.$$

Beweis. Man schneide von der Grundlinie und Höhe des Rechtecks ABCD aus der nehmlichen Ecke A zwei Stücke AE und AF gleich mit der Seite des gegebenen Quadrats Q ab und ziehe durch die Punkte E und F Parallelen mit den Seiten des Rechtecks, so entsteht ein neues Rechteck ABGF und ein Quadrat AEHF, welches dem gegebenen Quadrate Q gleich ist. Das Rechteck ABGF hat mit dem gegebenen Rechtecke ABCD gleiche Grundlinie und mit dem Quadrate Q gleiche Höhe; es läßt sich daher nach §. 205 und §. 206 mit beiden Figuren vergleichen. Bezeichnen wir, um abzukürzen, das Rechteck ABCD mit R und das Rechteck ABGF mit S, so müssen sich die Rechtecke R und S, da sie einerlei Grundlinie haben, wie ihre Höhen AD und AF verhalten, und da sich nach der Annahme AD zu AF wie 3 zu 1 verhält, so verhält sich folglich auch

$$1)\quad R:S = 3:1.$$

Das Rechteck S und das Quadrat Q haben gleiche Höhe und verhalten sich folglich wie ihre Grundlinien AB und AE, und da zu Folge der Annahme AB : AE = 5 : 1 ist, so verhält sich folglich auch

$$2)\quad S:Q = 5:1.$$

Aus der ersten Proportion folgt $R = 3 . S$
und aus der zweiten $S = 5 . Q$,
folglich ist: $R = 3 . 5 . Q = 15 . Q$,
also die Zahl für den Inhalt des auszumessenden Rechtecks

$$J = 3 . 5 = 15.$$

Anm. 1. Um größerer Anschaulichkeit willen hat man in dem vorstehenden Beweise für die Maaßzahlen der Grundlinie und Höhe zwei bestimmte Zahlen 5 und 3 gesetzt. Man kann indeß statt dieser bestimmten Zahlen auch die allgemeinen Zeichen g und h setzen und im Uebrigen den Beweis buchstäblich beibehalten. Dieser Beweis gilt also nicht bloß für den Fall, daß g und h ganze Zahlen sind, sondern er umfaßt auch alle diejenigen Fälle, in welchen die Maaßzahlen der Grundlinie und Höhe gebrochene Zahlen sind.

---

haupten hört, größer, sondern zu Folge des Obigen um 358 Fuß kleiner, als die preußische Meile. Will man aber unter einer deutschen Meile zwei Reisestunden verstanden haben, dann würden solcher Meilen ohngefähr 12½ auf einen Grad des Aequators gehen, und dieselbe würde dann allerdings sowohl die geographische, als auch die preußische Meile um ein Beträchtliches übertreffen.

Anm. 2. Ist von einem Rechtecke die Grundlinie $= 5' \, 7''$ und die Höhe $= 4' \, 3''$ (Werkmaaß) gegeben, so hat man zunächst diese Zahlen auf die nehmliche Einheit, z. B. den Zoll, zurückzuführen, und also

$$5' \, 7'' = 67'' \text{ und } 4' \, 3'' = 51''$$

zu setzen; dann ist der gesuchte Inhalt des Rechtecks

$$= 67 \, . \, 51 \square'' = 3417 \square'' = 23 \square' \, 105 \square''.$$

Bemerkung. Der vorhergehende Lehrsatz wird gewöhnlich kurz so ausgesprochen: „Der Inhalt eines Rechtecks wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt.“ — In ähnlicher abgekürzter Art sind auch die nächstfolgenden Sätze ausgedrückt.

Eben so wird man im Folgenden der Kürze wegen häufig Linien und ihre Maaßzahlen durch die nehmlichen Buchstaben bezeichnen und eine Linie, welche die Maaßzahl a hat, auch kurzweg die Linie a nennen. Diese doppelte Bedeutung der nehmlichen Zeichen kann jedoch keine Mißverständnisse herbeiführen, wenn man nur festhält, daß in der Rechnung alle Buchstaben allein Zahlen, niemals die Größen selbst vorstellen. — In der Figur dagegen hat man unter den Buchstaben die Größen selbst (Linien oder Flächen) zu verstehen.

§. 210. Zusatz.

Aus den vorhergehenden §§. und den §§. 163 — 166 folgt:

1) Der Inhalt (J) eines Quadrats wird gefunden, wenn man eine Seite (a) mit sich selbst multiplicirt, also

$$J = a^2.$$

2) Der Inhalt (J) eines Parallelogramms ist gleich dem Producte aus der Grundlinie (g) und der Höhe (h), also

$$J = g \, . \, h.$$

3) Der Inhalt (J) eines Dreiecks ist gleich dem halben Producte aus der Grundlinie (g) und der Höhe (h), also

$$J = {}^1\!/_2 g \, . \, h.$$

4) Der Inhalt (J) eines Trapezes wird gefunden, wenn man die mittlere Länge, (d. h. die halbe Summe der beiden parallelen Seiten a und b), mit der Höhe (h) multiplicirt, also

$$J = {}^1\!/_2 (a + b) \, . \, h.$$

Anm. 1. Wenn z. B. die Seite eines Quadrats $a = 7$ gegeben ist, so ist der Inhalt $J = 7 \, . \, 7 = 49$.

Wenn ferner von einem Parallelogramme die Grundlinie $g = 12$ und die Höhe $h = 8$ gegeben ist, so ist der Inhalt $J = 8 \, . \, 12 = 96$.

Ist von einem Dreiecke die Grundlinie $g = 5$ und die Höhe $h = 9$ gegeben, so ist der Inhalt $J = {}^1\!/_2 \, . \, 5 \, . \, 9 = 22{}^1\!/_2$.

Wenn endlich von einem Trapeze die eine Parallele $a = 10$, die andere $b = 7$, also die mittlere Länge $= 8{}^1\!/_2$ und die Höhe $h = 6$ gegeben ist, so ist der Inhalt $J = 51$.

Anm. 2. Da die zweite Potenz einer Zahl (z. B. $5^2 = 25$) den Inhalt eines Quadrates ausdrückt, dessen Seite diese Zahl (5) zur Maaßzahl hat, so pflegt man auch die zweite Potenz einer Zahl das Quadrat derselben zu nennen.

§. 211. Zusatz.

1) Zwei Rechtecke ABCD und EFGH (Fig. 141) sind gleich, wenn sich ihre Grundlinien umgekehrt wie die Höhen verhalten, wenn sich also verhält $AB : EF = EH : AD$.

Beweis. Da in jeder Proportion das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder ist, so ergiebt sich aus der in der Voraussetzung gegebenen Proportion die Gleichung

$$AB \,.\, AD = EF \,.\, EH.$$

Nun drücken aber diese Producte, (wenn wir uns statt der Linien ihre Maaßzahlen gesetzt denken,) die Inhalte der Rechtecke ABCD und EFGH aus; folglich ist Rechteck ABCD = EFGH.

2) Dasselbe kann eben so (vermöge §. 210, 2 u. 3) von zwei (schiefwinkligen) Parallelogrammen und von zwei Dreiecken erwiesen werden.

3) Ein Quadrat ABCD (Fig. 142) ist einem Rechtecke EFGH gleich, wenn die Seite des Quadrats mittlere Proportionale zwischen den Seiten des Rechtecks ist, d. h. wenn sich verhält

$$EF : AB = AB : EH.$$

Beweis. Denn vermöge der gegebenen Proportionen ist $AB^2 = EF \,.\, EH$; nach §. 210 ist aber $AB^2 = AB \,.\, AB$ dem Inhalte des Quadrats ABCD und EF . EH dem Inhalte des Rechtecks EFGH gleich.

4) Es sagen hiernach die Behauptungen der §§. 170 und 199, 4 wesentlich dasselbe aus.

5) Weiter folgt hieraus, daß die Seite des einem gegebenen Rechtecke gleichen Quadrates gefunden wird, wenn man die mittlere Proportionale zwischen den Seiten des Rechtecks sucht.

Anm. Der Beweis eines Satzes wird nicht mehr als rein geometrisch angesehen, wenn in demselben solche arithmetische Operationen, welche sich nur an den Maaßzahlen, nicht aber an den räumlichen Größen selbst vollziehen lassen, zur Anwendung kommen. Nun lassen sich zwar die Maaßzahlen zweier Größen, niemals aber diese selbst mit einander multipliciren. Es kann folglich auch der obige Beweis der Behauptung (1) nicht mehr für rein geometrisch gelten. Wir fügen deßhalb für diese wichtige Behauptung, aus welcher dann (2), (3), (4) und (5) einfache Folgerungen sind, noch den folgenden rein geometrischen Beweis hinzu.

Wenn man AD = EK (Fig. 141) macht und KL || EF zieht, so verhält sich

nach §. 205 Rechteck ABCD : EFLK = AB : EF

und nach §. 206, 1 Rechteck EFGH : EFLK = EH : EK.

Nun ist aber nach der Voraussetzung

$$AB : EF = EH : AD = EH : EK,$$

folglich auch $ABCD : EFLK = EFGH : EFLK;$

demnach ist $ABCD = EFGH.$

§. 212. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke oder Parallelogramme, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich wie die Rechtecke der einschließenden Seiten.

Beweis. Um den Satz zunächst für zwei Dreiecke, welche einen gleichen Winkel haben, zu erweisen, denken wir uns dieselben so zusammengelegt, daß die gleichen Winkel sich decken. In diese Lage gebracht seien die beiden gegebenen Dreiecke ABC und CDE (Fig. *142). Ziehen wir noch AE und denken uns BC und CE als die Grundlinien der Dreiecke ABC und ACE, dann haben dieselben gleiche Höhe, weil ihre Spitzen in A zusammenfallen; es verhält sich daher 1) $\triangle\, ABC : ACE = BC : CE.$

Weiter haben auch die Dreiecke ACE und CDE, wenn wir AC und CD als Grundlinien annehmen, da ihre Spitzen in E zusammenfallen, gleiche Höhe; und es verhält sich folglich

2) △ ACE : CDE = AC : CD.

Multipliciren wir nun diese Proportionen, indem wir uns statt der Größen ihre Maaßzahlen gesetzt denken, in einander*), so ergiebt sich

ABC . ACE : ACE . CDE = AC . BC : CD . CE

oder ABC : CDE = AC . BC : CD . CE,

womit die Richtigkeit des obigen Satzes erwiesen ist, da das Product der Maaßzahlen zweier Linien den Inhalt des von denselben gebildeten Rechtecks ausdrückt.

Der nehmliche Satz gilt auch von zwei Parallelogrammen, da jedes Parallelogramm doppelt so groß ist, als ein Dreieck, mit welchem es in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmt.

Anm. Den rein geometrischen Beweis des obigen Satzes führen wir am bequemsten an zwei Parallelogrammen ABCD und EFGH (Fig. 145), in denen wir annehmen, daß Winkel DAB = HEF ist. Construiren wir über den Grundlinien AB und EF die Rechtecke ABKL und EFMN, deren Höhen AL und EN wir gleich AD und EH machen, so verhält sich

ABCD : ABKL = BO : BK = BO : BC

und EFGH : EFMN = FP : FM = FP : FG.

Nun ist aber, wie leicht zu zeigen, △ BCO ∾ BGP und daher

BO : BC = FP : FG,

folglich ABCD : ABKL = EFGH : EFMN.

§. 213. Lehrsatz.

Aehnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten.

Beweis. Wenn die Dreiecke ABC und abc (Fig. 143) ähnlich sind, so stimmen sie in allen Winkeln überein. Ist also in denselben W. A = a, so verhält sich nach dem vorhergehenden §.

1) △ ABC : abc = AB . AC : ab . ac.

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und abc verhält sich aber auch

2) AB : ab = AC : ac.

Multipliciren wir beide Seiten dieser Proportion mit

AB : ab = AB : ab,

so verwandelt sich dieselbe in

3) $AB^2 : ab^2$ = AB . AC : ab . ac.

Aus (1) und (3) aber folgt

4) △ ABC : abc = $AB^2 : ab^2$,

also, wenn wir über AB und ab die Quadrate ABDE und abde zeichnen:

△ ABC : abc = ABDE : abde.

Anm. Um den vorstehenden wichtigen Satz auf rein geometrischem Wege (ohne Multiplication von Brüchen) zu erweisen, ziehen wir mit den Seiten AB und ab durch die gegenüberliegenden Ecken C und c die Parallelen FG und fg und verlängern die Seiten AE und BD und die Seiten ae und bd, bis sie diese Parallelen in den Punkten F und G und in den Punkten f und g schneiden. Dann verhält sich zunächst

---

*) Nach der Regel: Brüche werden multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt.

$$ABGF : ABDE = AF : AE = AF : AB$$

und $$abgf : abde = af : ae = af : ab.$$

Nach §. 196 verhält sich aber

$$AF : AB = af : ab,$$

folglich $$ABGF : ABDE = abgf : abde$$

oder $$ABGF : abgf = ABDE : abde,$$

also auch $$\triangle\ ABC : abc = ABDE : abde.$$

§. 214. Lehrsatz.

Ueberhaupt verhalten sich ähnliche Vielecke ABCDEF und abcdef (Fig. 130) wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten, z. B. wie $AB^2 : ab^2$.

Beweis. Wenn wir die Vielecke durch Diagonalen, aus ein Paar gleichliegenden Ecken A und a gezogen, in Dreiecke zerschneiden, so sind nach §. 197 die entstandenen Dreiecke ähnlich, also $\triangle\ ABC \sim abc$, $ACD \sim acd$ u. s. w. Demnach verhält sich zu Folge des vorhergehenden §.

$$\triangle\ ABC : abc = AC^2 : ac^2$$

und auch $$\triangle\ ACD : acd = AC^2 : ac^2,$$

folglich $$\triangle\ ABC : abc = ACD : acd.$$

Es verhalten sich also die gleichliegenden Dreiecke ABC und abc gerade so, wie die gleichliegenden Dreiecke ACD und acd, und da dasselbe eben so von allen folgenden Dreiecken gilt, so werden wir folglich setzen können:

$$\triangle\ ABC : abc = ACD : acd = ADE : ade = AEF : aef.$$

Wenn aber mehrere Verhältnisse als gleich gegeben sind, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede, also

$$ABC + ACD + ADE + AEF : abc + acd + ade + aef = ABC : abc.$$

Statt der ersten Summe kann ich Vieleck ABCDEF und statt der andern Summe Vieleck abcdef, ferner statt des Verhältnisses $\triangle\ ABC : abc$ kann ich nach dem vorhergehenden §. auch $AB^2 : ab^2$ setzen. Hiernach verwandelt sich die letzte Proportion in

$$ABCDEF : abcdef = AB^2 : ab^2,$$ w. z. e. w.

§. 215. Lehrsatz.

1) Regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Quadrate der Radien der umschriebenen Kreise.

2) Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate der Radien oder Durchmesser.

Beweis. 1) Wenn man in zwei regelmäßigen Vielecken von gleicher Seitenzahl (Fig. 132) die Mittelpunkte M und m mit den Endpunkten zweier Seiten AB und ab verbindet, so verhalten sich die beiden Vielecke offenbar zu einander eben so wie die entstandenen Dreiecke AMB und amb, und da diese sich nach §. 213 wie $AM^2 : am^2$ verhalten, so muß dasselbe auch von den Vielecken selbst gelten.

2) Die Richtigkeit der zweiten Behauptung folgt aus Nro. 1, indem wir uns die Kreise als ähnliche regelmäßige Vielecke von unendlich vielen Seiten denken.

Anm. Wenn wir also den Durchmesser eines Kreises verdoppeln oder verdreifachen, so wird die Kreisfläche viermal oder neunmal größer u. s. w.

§. 216. Lehrsatz.

1) Wenn man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Vielecke in ähnlicher Lage zeichnet, so ist das über der Hypotenuse gezeichnete so groß, als die über den Catheten gezeichneten zusammen.

2) Wenn man mit den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, als Radien oder Durchmesser, Kreise beschreibt, so ist die Fläche des mit der Hypotenuse beschriebenen Kreises so groß, als die beiden anderen Kreisflächen zusammen.

Beweis. 1) Die ähnlichen Vielecke verhalten sich eben so zu einander, wie die Quadrate der gleichliegenden Seiten; da nun das Quadrat der Hypotenuse so groß ist, als die Quadrate der Catheten zusammen, so muß auch das Vieleck über der Hypotenuse so groß sein, als die Vielecke über den Catheten zusammen.

2) Die Richtigkeit der andern Behauptung wird eben so erwiesen, da sich nach dem vorhergehenden §. Kreise wie die Quadrate ihrer Radien oder Durchmesser verhalten.

Anm. Hieraus ergiebt sich auch noch leicht der Satz von den Monden des Hippokrates. Hat man nehmlich über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks Halbkreise beschrieben (Fig. 144), so sind die beiden mondförmigen Figuren α und β zusammen so groß, als das Dreieck γ. Denn nach dem vorhergehenden §. ist der Halbkreis über der Hypotenuse, $\gamma + \delta + \varepsilon$, so groß, als die Halbkreise über den Catheten, $\alpha + \delta$ und $\beta + \varepsilon$, zusammen genommen, also $\gamma + \delta + \varepsilon = \alpha + \delta + \beta + \varepsilon$ und folglich $\gamma = \alpha + \beta$.

§. 217. Aufgabe.

1) Wenn zwei ähnliche Vielecke gegeben sind, ein drittes zu zeichnen, welches ihrer Summe oder Differenz gleich ist.

2) Einen Kreis zu zeichnen, dessen Fläche der Summe oder Differenz der Flächen zweier gegebenen Kreise gleich ist.

(Die Auflösungen sind vermöge §. 216 dieselben, wie von §. 179.)

§. 218, a. Aufgabe.

1) Ein Quadrat zu zeichnen, welches zu einem gegebenen Quadrate ein vorgeschriebenes Verhältniß hat, z. B. sich wie 5 : 3 verhält.

2) Ein Vieleck zu zeichnen, welches einem gegebenen ähnlich ist und zu demselben ein vorgeschriebenes Verhältniß hat.

3) Einen Kreis zu zeichnen, dessen Fläche zur Fläche eines gegebenen Kreises ein vorgeschriebenes Verhältniß hat.

Aufl. 1) Wenn man zunächst eine Linie sucht, welche zu der Seite a des Quadrats das vorgeschriebene Verhältniß 5 : 3 hat und sich aus a und $^5/_3$a ein Rechteck gebildet denkt, so hat offenbar dieses Rechteck zu dem gegebenen Quadrate das vorgeschriebene Verhältniß (5 : 3). Man hat daher nur noch nöthig, dieses Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, indem man die mittlere Proportionale zwischen a und $^5/_3$a sucht.

Die Auflösungen von Nro. 2 und 3 werden vermöge §. 214 und §. 215, 2 ebenso erhalten.

Anm. Die Seite eines Quadrats, welches doppelt so groß ist, als ein gegebenes, findet man, wenn man die Diagonale zieht, und die Seite des halb so großen

Quadrats wird erhalten, wenn man die Diagonale halbirt. — Halbirt man dagegen die Seite des gegebenen Quadrats, so ist das Quadrat dieser Hälfte nur $^1/_4$ des gegebenen.

*§. 218, b. Aufgabe.

Ein Dreieck ABC (Fig. 146) durch Linien, welche der Grundlinie AB parallel laufen, in eine vorgeschriebene Anzahl, z. B. drei gleiche Theile, zu theilen.

(Die Auflösung dieser Aufgabe ist eigentlich schon in Nro. 2 des vorhergehenden §. enthalten, soll jedoch um größerer Deutlichkeit Willen hier noch ausführlich mitgetheilt werden.)

Ueber eine Seite AC des Dreiecks ABC beschreibe man einen Halbkreis, theile die Seite AC in drei gleiche Theile, errichte in den Theilungspunkten D und E die Lothe DF und EG, ziehe CF und CG, mache CF = CH und CG = CK und ziehe endlich durch H und K mit der Grundlinie AB die Parallelen HL und KM, so theilen diese das gegebene Dreieck ABC in drei gleiche Theile.

Beweis. Denn da $\triangle$ ABC $\sim$ HLC ist, so verhält sich nach §. 213

$$\triangle \text{ ABC} : \text{HLC} = \text{AC}^2 : \text{CH}^2 = \text{AC}^2 : \text{CF}^2.$$

Weiter ist aber, wenn wir uns AF gezogen denken, Winkel AFC = 90^0, und es verhält sich daher nach §. 207

$$\text{AC}^2 : \text{CF}^2 = \text{AC} : \text{CD} = 3 : 1,$$

also auch $\triangle$ ABC : HLC = 3 : 1.

Demnach ist Dreieck HLC der dritte Theil des Dreiecks ABC. — Ebenso wird erwiesen, daß Dreieck CKM = $^2/_3$ Dreieck ABC ist.

*§. 219. Aufgabe.

Ein Vieleck zu zeichnen, welches einem gegebenen Vielecke A gleich und einem anderen gegebenen Vielecke B ähnlich ist (Fig. 147).

Analysis. Denken wir uns die Aufgabe bereits gelöst und X als das verlangte Vieleck erhalten und bezeichnen mit b und x zwei gleichliegende Seiten in den ähnlichen Vielecken B und X, so muß sich nach §. 214 verhalten

$$\text{B} : \text{X} = \text{b}^2 : \text{x}^2,$$

oder da X = A sein soll: $\text{B} : \text{A} = \text{b}^2 : \text{x}^2.$

Verwandeln wir nun nach §. 178 die Vielecke B und A in Quadrate und nennen die Seiten derselben β und α, so geht die letzte Proportion über in

$$\beta^2 : \alpha^2 = \text{b}^2 : \text{x}^2.$$

Hieraus ergiebt sich die folgende

Aufl. Man verwandle A und B in Quadrate, deren Seiten α und β heißen sollen, suche nach §. 201 die vierte Proportionale x zu β, α und b, so daß sich verhält $\beta : \alpha = \text{b} : \text{x}$,
und zeichne endlich nach §. 204 über x ein Vieleck X, welches dem Vielecke B ähnlich ist und als gleichliegende Seiten mit b die Seite x hat, so ist Vieleck X das verlangte, d. h. gleich A.

(Der Beweis ist in der Analysis enthalten.)

Anm. Diese sehr allgemeine Aufgabe, bei welcher, wenn auch nicht unmittelbar, doch mittelbar fast alle früheren Sätze zur Anwendung kommen, kann wohl als das Höchste desjenigen angesehen werden, was mit den bis hierher erworbenen Kenntnissen zu leisten sein dürfte. — Mit Hilfe derselben läßt sich z. B. jede beliebige geradlinige Figur in ein gleichseitiges Dreieck, in ein regelmäßiges Sechseck u. dgl. verwandeln.

Uebungsaufgaben.

Aufgabe 307 — 309. Eine gegebene Linie so zu theilen, daß

307) die Quadrate beider Theile in einem vorgeschriebenen Verhältnisse zu einander stehen;

308) daß die Summe,

309) der Unterschied dieser Quadrate einem gegebenen Quadrate gleich wird.

Aufgabe 310 — 312. Eine gegebene Linie so zu verlängern, daß die Bedingungen der vorhergehenden Aufgaben von dem Quadrate der Verlängerung und dem Quadrate der ganzen verlängerten Linie erfüllt werden.

Aufgabe 313 — 314. Ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, so daß

313) die zusammenstoßenden Seiten ein vorgeschriebenes Verhältniß haben;

314) sich um eine gegebene Linie von einander unterscheiden.

Aufgabe 315. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, so daß der Winkel an der Spitze ungeändert bleibt.

Aufgabe 316. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Aufgabe 317. Ein gegebenes Dreieck so umzuwandeln, daß es einem gegebenen Dreiecke ähnlich wird.

Aufgabe 318 — 322. Ein Dreieck in zwei Stücke zu zerschneiden, welche in einem vorgeschriebenen Verhältnisse stehen, durch eine Linie, welche

318) durch die Spitze des Dreiecks geht;

319) durch eine Linie, welche durch einen auf einer Seite gegebenen Punkt geht;

320) durch eine Linie, welche durch einen innerhalb des Dreiecks gegebenen Punkt geht;

321) durch eine Linie, welche durch einen außerhalb des Dreiecks gegebenen Punkt geht;

322) durch eine Linie, welche einer gegebenen Linie parallel ist.

Aufgabe 323 — 327. Dieselben Aufgaben für ein Trapez.

Aufgabe 328 — 332. Dieselben Aufgaben für ein beliebiges Viereck oder Vieleck.

Aufgabe 333. In einem gegebenen Dreiecke einen Punkt so zu bestimmen, daß Linien, aus diesem Punkte nach den Ecken des Dreiecks gezogen, dasselbe in drei Stücke zerschneiden, welche in einem vorgeschriebenen Verhältnisse zu einander stehen.

Aufgabe 334 — 335. Die Fläche eines Kreises durch einen concentrischen Kreis

334) zu halbiren;

335) nach einem vorgeschriebenen Verhältnisse zu theilen.

Zehnter Abschnitt.

Von der Ausmessung des Kreises.

§. 220. Erklärung.

Nach §. 198, 2 verhalten sich die Peripherien zweier Kreise wie ihre Durchmesser, also wenn wir die Peripherien mit p und p′, die Durchmesser mit d und d′ bezeichnen: $p : p' = d : d'$,

oder wenn wir die Mittelglieder vertauschen:

$$p : d = p' : d'.$$

Es findet daher bei allen Kreisen das nehmliche Verhältniß zwischen Peripherie und Durchmesser statt. Man bezeichnet dieses unveränderliche Verhältniß mit π und hat also unter π diejenige Zahl zu verstehen, welche anzeigt, wie oft der Durchmesser in der Peripherie enthalten ist. Diese Verhältnißzahl ist jedoch irrational und kann folglich nicht ganz genau, sondern nur näherungsweise dargestellt werden. Ein solcher Näherungswerth ist z. B. $^{22}/_{7}$ *); noch genauer ist der Decimalbruch 3,14159265.

Anm. Der Näherungswerth $^{22}/_{7}$ ist zuerst von Archimedes aufgefunden worden, indem er den Umfang in und um den Kreis beschriebener Vielecke berechnete und hierdurch Grenzen erhielt, zwischen denen die gesuchte Verhältnißzahl liegt. — Gegenwärtig kennt man die Zahl π bis auf 500 Decimalstellen. Wie man rasch Näherungswerthe derselben findet, zeigt unter anderen: „Die niedere Analysis. Essen 1838.“ S. 133. — Vergleiche auch im vorliegenden Buche §. 263.

Bemerkung. Obschon es nun allerdings nicht möglich ist, die Zahl π ganz genau auszudrücken, so kann man sich dieselbe doch als genau gefunden denken. In den folgenden §§. werden wir unter π nicht irgend einen Näherungswerth, sondern die (allerdings nur in Gedanken existirende) Zahl verstehen, welche das Verhältniß zwischen Peripherie und Durchmesser genau ausdrückt.

§. 221. Aufgabe.

Aus dem Radius r eines Kreises die Peripherie p und den Flächeninhalt J zu berechnen.

Aufl. 1) $p = 2r\pi$. 2) $J = r^2\pi$.

Beweis. 1) Ist der Radius r, so ist der Durchmesser 2r, und da dieser πmal in der Peripherie p enthalten ist, folglich $p = 2r\pi$.

2) Nach §. 167 ist der Kreis einem Dreiecke gleich, welches den Radius r zur Höhe und die Peripherie $2r\pi$ zur Grundlinie hat; der Inhalt des Dreiecks ist aber gleich dem halben Producte aus Höhe und Grundlinie, also:

$$J = \frac{r \,.\, 2r\pi}{2} = r \,.\, r\pi = r^2\pi.$$

Anm. 1. Es sei z. B. von einem Kreise der Radius $r = 5''$ gegeben, so ist, wenn wir als Näherungswerth von π den Bruch $^{22}/_{7}$ annehmen,

die Peripherie $p = 2r\pi = 2 \,.\, 5 \,.\, {}^{22}/_{7} = 10 \,.\, 3^1/_7 = 31^3/_7{}''$

und der Inhalt $J = r^2\pi = 5^2 \,.\, {}^{22}/_{7} = 25 \,.\, (3^1/_7) = 78^4/_7 \square''$.

Uebrigens sieht man leicht, daß, wenn man die Peripherie bereits gefunden hat und noch den Inhalt zu suchen hat, man nur die Peripherie mit dem halben Radius zu multipliciren braucht; so kann man z. B. in dem vorhergehenden Exempel auch setzen: $J = (31^3/_7) \,.\, (2^1/_2) = 78^4/_7 \square''$.

---

*) Es ist ein häufig in Rechenbüchern sich findender Irrthum, daß der Decimalbruch 3,14 dem wahren Verhältnisse näher komme, als der gemeine Bruch $^{22}/_{7}$; nun ist aber, als Decimalbruch ausgedrückt, $^{22}/_{7} = 3{,}142857\ldots$, also von dem wahren Werthe um weniger, als 0,0013 verschieden, während 3,14 von dem wahren Werthe um mehr als 0,0015 abweicht. — Beiläufig sieht man noch, daß der Bruch $^{22}/_{7}$ ohngefähr um $^1/_{800}$ zu groß ist.

Anm. 2. Ist die Peripherie p gegeben, so findet man vermöge der Gleichung (1) im vorhergehenden §. den Radius

$$r = \frac{p}{2\pi},$$

und wenn der Inhalt J gegeben ist, so folgt aus der Gleichung (2)

$$r^2 = \frac{J}{\pi}, \text{ also } r = \sqrt{\frac{J}{\pi}}.$$

Ist z. B. p = 32′, so ist

$$r = 32 : {}^{44}/_{7} = {}^{224}/_{44} = 5{,}09\ldots,$$

und wenn J = 88□′ gegeben ist, so ist

$$r = \sqrt{88 : {}^{22}/_{7}} = \sqrt{28} = 5{,}29\ldots$$

§. 222. Lehrsatz.

Bogen oder Ausschnitte desselben Kreises verhalten sich wie die zugehörigen Centriwinkel.

(Der Beweis ist der nehmliche wie von §. 205.)

§. 223. Aufgabe.

Aus der Anzahl der Grade des Centriwinkels α die Länge des zugehörigen Bogens b und den Inhalt des Ausschnitts A zu berechnen.

Aufl. 1) $b = \frac{r\pi\alpha}{180}$. 2) $A = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$.

Beweis. 1) Die Peripherie ist $= 2r\pi$, folglich der Bogen von einem Grade $= \frac{2r\pi}{360} = \frac{r\pi}{180}$ und der Bogen, welcher α^0 hat, $= \frac{r\pi\alpha}{180}$.

2) Eben so ist der Flächeninhalt des Kreises $= r^2\pi$, der Ausschnitt von $1^0 = \frac{r^2\pi}{360}$ und der Ausschnitt von $\alpha^0 = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$.

Anm. 1. Ist z. B. der Radius r = 8′ und der Centriwinkel $\alpha = 72^0$ gegeben, so ist

$$b = \frac{r\pi\alpha}{180} = 8 \cdot (3^1/_7) \cdot {}^{72}/_{180} = 25^1/_7 \cdot {}^2/_5 = 10^2/_{35}{}'$$

und $$A = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = 64 \cdot (3^1/_7) \cdot {}^{72}/_{360} = 201^1/_7 \cdot {}^1/_5 = 40^8/_{35}\square'.$$

Wenn man den Bogen bereits gefunden hat und noch den Ausschnitt berechnen soll, so braucht man nur den Bogen mit dem halben Radius zu multipliciren, um den Inhalt des Ausschnittes zu finden. So hat man z. B. im obigen Falle sogleich

$$A = 10^2/_{35} \cdot 4 = 40^8/_{35}.$$

Es versteht sich wohl von selbst, wie man zu rechnen hätte, wenn der Centriwinkel in Minuten oder Secunden ausgedrückt sein sollte.

Anm. 2. Nicht uninteressant ist die Frage nach dem Bogen, dessen Länge dem Radius gleich ist. Bezeichnet man die Zahl seiner Grade mit x, so hat man in der Gleichung (1) des vorhergehenden §. $\alpha = x$ und $b = r$ zu setzen, wodurch dieselbe übergeht in

$$r = \frac{r\pi x}{180} \text{ oder } 180r = r\pi x,$$

also $$x = \frac{180}{\pi} = 180 \cdot {}^7/_{22} = 57^3/_{11}{}^0.$$

Der dem Radius gleiche Bogen hat also etwas über 57^0.

§. 224. Zusatz.

Wenn man Bogen oder Ausschnitte verschiedener Kreise **ähnlich** nennt, wenn sie in der Größe der Centriwinkel übereinstimmen, so ergeben sich aus den Formeln des vorhergehenden §. folgende zwei Sätze:

1) Aehnliche Bogen verhalten sich eben so wie die Radien und

2) ähnliche Ausschnitte wie die Quadrate der Radien, mit denen sie beschrieben sind.

Beweis. 1) Sind b und b' zwei ähnliche Bogen mit den Radien r und r', und ist α der beiden gemeinschaftliche Centriwinkel, so ist nach Nro. 1 im vorhergehenden §.

$$b = \frac{r\pi\alpha}{180} \text{ und } b' = \frac{r'\pi\alpha}{180},$$

folglich $$b : b' = r : r'.$$

2) Sind ferner A und A' ähnliche Ausschnitte, so ist nach Nro. 2 im vorhergehenden §.

$$A = \frac{r^2\pi\alpha}{360} \text{ und } A' = \frac{r'^2\pi\alpha}{360},$$

folglich $$A : A' = r^2 : r'^2.$$

Elfter Abschnitt.

Vermischte Sätze. *)

A. Von Transversalen.

§. 225. Erklärung.

Linien, welche durch die Ecken eines Dreiecks gezogen die gegenüberstehenden Seiten oder die Verlängerungen schneiden, werden **Transversalen** genannt.

*§. 226, a. Lehrsatz.

Wenn man durch einen innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks ABC (Fig. 149, a und b) gegebenen Punkt G drei Transversalen zieht, so ist das Produkt von drei auf den Seiten gebildeten Abschnitten, welche nicht zusammenstoßen, dem Produkte der drei übrigen (ebenfalls nicht zusammenstoßenden) Abschnitte gleich, nehmlich $AF \cdot BD \cdot CE = BF \cdot CD \cdot AE$.

Beweis. Die Dreiecke ACF und BCF haben, wenn wir AF und BF als Grundlinien annehmen, einerlei Höhe und müssen sich daher wie ihre

---

*) Diese Sätze sind Ergänzungen und Erweiterungen der in den vorhergehenden Abschnitten behandelten Lehren, welche dort übergangen sind, um den Anfänger nicht durch ein zu reiches Material vom weiteren Studium abzuschrecken.

Grundlinien AF und BF verhalten. Dasselbe gilt auch von den Dreiecken AGF und BGF. Wir werden daher setzen können:

$$\triangle\ ACF : BCF = \triangle\ AGF : BGF = AF : BF.$$

Nun verhält sich aber in jeder Proportion die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede, folglich verhält sich auch:

$$\triangle\ ACF - AGF : BCF - BGF = AF : BF,$$

d. h. 1) $\triangle\ ACG : BCG = AF : BF.$

Eben so findet man weiter

2) $\triangle\ BCG : ABG = CE : AE$

und 3) $\triangle\ ABG : ACG = BD : CD.$

Wenn man nun diese Proportionen mit einander multiplicirt *) und die gleichen Factoren im Dividendus und Divisor aufhebt, so ergiebt sich

$$1 = AF . CE . BD : BF . AE . CD$$

oder $AF . BD . CE = BF . CD . AE.$

Anm. Aus der Natur des vorstehenden Satzes läßt sich von vorn herein schließen, daß es möglich sein muß, denselben durch bloße Proportionen zwischen Linien ohne Zuziehung von Flächen zu erweisen. Man gelangt hierzu unter Anderen auf folgende Art: — Wenn man sich durch C Parallelen zu AD und BE gezogen denkt, welche AB oder ihre Verlängerung in den Punkten H und K schneiden, so verhält sich

$$BD : CD = AB : AH \text{ und } CE : AE = BK : AB,$$

folglich $BD . CE : CD . AE = BK : AH.$

Nun ist aber $BK : BF = CG : GF = AH : AF,$

also $BK : AH = BF : AF$

und daher $BD . CE : CD . AE = BF : AF$

oder $AF . BD . CE = BF . CD . AE.$

§. 226, b. Zusatz.

Man kann der Gleichung des vorhergehenden §. auch die folgende Form geben: $CE : CD = (AE : BD) \times (BF : AF).$

Es folgt aber hieraus, daß die Verbindungslinie der Punkte D und E mit der Seite AB parallel ist, wenn diese Seite im Punkte F halbirt, also AF = BF ist, — und umgekehrt.

*§. 227. Lehrsatz.

Wenn drei Transversalen die Seiten eines Dreiecks ABC (Fig. 149, a und b) so durchschneiden, daß die Produkte dreier nicht zusammenstoßender Abschnitte einander gleich sind, nehmlich

$$AF . BD . CE = BF . CD . AE$$

ist, so müssen die drei Transversalen sich selbst in dem nehmlichen Punkte durchschneiden (vorausgesetzt, daß, wenn eine durch den Durchschnittspunkt zweier der gegebenen Transversalen und die dritte Ecke des Dreiecks gezogene Linie die gegenüberliegende Seite selbst oder deren Verlängerung trifft, dieß auch von der dritten der gegebenen Transversalen gilt).

---

*) Dieser uneigentliche und abgekürzte Ausdruck, wie man ihn häufig gebraucht findet, will sagen: Man soll sich sämmtliche Größenverhältnisse in Zahlenverhältnisse verwandelt denken, indem man statt der Größen, welche ein Verhältniß bilden, ihre auf einerlei Einheit bezogenen Maaßzahlen setzt, und hierauf die entstandenen Brüche auf der einen Seite der obigen Gleichungen mit den Brüchen auf der andern Seite multipliciren.

Beweis. Denn angenommen, es schnitten sich die drei Transversalen AD, BE und CF in drei verschiedenen Punkten, so wird sich z. B. durch die Ecke C und den Punkt, in welchem sich die aus den beiden anderen Ecken A und B gezogenen Transversalen schneiden, eine neue Transversale ziehen lassen, welche AB nicht in F, sondern in einem andern Punkte X schnitte, und es müßte dann zu Folge des vorhergehenden §. die Gleichung stattfinden:

$$AX \cdot BD \cdot CE = BX \cdot CD \cdot AE.$$

Nach der Voraussetzung soll aber sein

$$AF \cdot BD \cdot CE = BF \cdot CD \cdot AE.$$

Wenn wir nun diese beiden Gleichungen durch einander dividiren, so erhalten wir $AX : AF = BX : BF$, welches offenbar unmöglich ist. — Es müssen daher die drei Transversalen AD, BE und CF sich in dem nehmlichen Punkte durchschneiden.

Anm. Wenn wir in Figur 149, a auf der über A fortgesetzten Verlängerung von AB oder in Figur 149, b auf der Linie AB zu den Punkten A, B und F den vierten harmonischen Punkt Z suchen, so daß sich also verhält

$$AZ : BZ = AF : BF,$$

und C mit Z verbinden, so gilt auch von den drei Transversalen AD, BE und CZ die Bedingungsgleichung des §. 226, ohne daß sich dieselben in dem nehmlichen Punkte durchschneiden. Denn zu Folge des in §. 226 Erwiesenen ist

$$\frac{AF \cdot DB \cdot CE}{BF \cdot CD \cdot AE} = 1,$$

und da nach der Construction $\frac{AF}{BF} = \frac{AZ}{BZ}$

ist, so ist folglich auch $\frac{AZ \cdot BD \cdot CE}{BF \cdot CD \cdot AE} = 1.$

Der in §. 227 aufgeführte Lehrsatz würde daher ohne die demselben am Schlusse beigefügte Einschränkung nicht unbedingt richtig sein. Ausführlicher handelt hierüber Dr. Boner: Berichtigung der Umkehrung von Bernoulli's Satz über die Transversalen. Münster, 1851.

*§. 228. Lehrsatz.

1) In jedem Dreiecke durchschneiden sich die drei Mittellinien (d. h. die Linien, welche die Ecken mit den Mitten der gegenüberstehenden Seiten verbinden) in dem nehmlichen Punkte, welcher jede Mittellinie in zwei Stücke theilt, von denen das nach der Ecke zu liegende das Doppelte vom andern ist.

2) Die drei Höhen eines jeden Dreiecks (d. h. die aus den Ecken auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Lothe) durchschneiden sich in dem nehmlichen Punkte.

3) Die drei Linien, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, schneiden sich in dem nehmlichen Punkte, nehmlich im Mittelpunkte des in das Dreieck zu zeichnenden Kreises.

4) Wenn man in den Halbirungspunkten der Seiten eines Dreiecks Lothe errichtet, so schneiden sich dieselben in demselben Punkte, nehmlich im Mittelpunkte des um das Dreieck zu beschreibenden Kreises.

Beweis. 1) Wenn $AF = BF$, $BD = CD$ und $CE = AE$ (Fig. 150) ist, so ist natürlich auch

$$AF . BD . CE = BF . CD . AE.$$

Folglich schneiden sich nach dem vorhergehenden §. alle drei Mittellinien AD, BE und CF in dem nehmlichen Punkte G.

Verbindet man ferner die Mitten zweier Seiten D und E, so ist nach §. 116 die Verbindungslinie DE $\parallel$ AB und daher Winkel GDE = GAB und Winkel GED = GBA, folglich $\triangle$ DGE $\sim$ AGB; demnach verhält sich

$$DG : AG = DE : AB.$$

DE ist aber nach §. 116 = $\frac{1}{2}$AB, also auch DG = $\frac{1}{2}$AG. — Eben so findet man EG = $\frac{1}{2}$BG und FG = $\frac{1}{2}$CG.

2) Wenn AD $\perp$ BC, BE $\perp$ AC und CF $\perp$ AB (Fig. 151) ist, so ist zunächst $\triangle$ BEA $\sim$ CFA, weil Winkel A = A und Winkel BEA = CFA = 90^0 ist; daher verhält sich

$$1)\quad AF : AE = AC : AB.$$

Eben so findet man leicht weiter

$$2)\quad BD : BF = AB : BC,$$

und $$3)\quad CE : CD = BC : AC.$$

Multiplicirt man diese Proportionen mit einander, so ergiebt sich:

$$AF . BD . CE : AE . BF . CD = AC . AB . BC : AB . BC . AC,$$

folglich $$AF . BD . CE = BF . CD . AE.$$

Demnach schneiden sich zu Folge des vorhergehenden §. die drei Lothe AD, BE und CF in dem nehmlichen Punkte G.

(3) und (4) sind bereits in §. 140 und 142 erwiesen; außerdem läßt sich aber auch Nro. 3 leicht aus dem vorhergehenden §. mit Hilfe von §. 186 herleiten.

Anm. 1. Der Punkt G (Fig. 150), in welchem sich die drei Mittellinien eines Dreiecks schneiden, wird der Schwerpunkt des Dreiecks genannt. (Vergl. Anfangsgründe der Physik §. 26.) Die Linien AG, BG und CG, welche den Schwerpunkt mit den Ecken des Dreiecks verbinden, theilen dasselbe in drei gleiche Theile. Denn da $\triangle$ ACF = BCF und AGF = BGF ist, so ist auch $\triangle$ ACG = BCG. Eben so wird $\triangle$ ACG oder BCG = ABG erwiesen.

Anm. 2. In dem Beweise von Nro. 2 ist zwar die Figur (151) nur für den Fall gezeichnet, daß das Dreieck ABC lauter spitze Winkel hat; der Beweis bleibt jedoch, wenn man die nehmliche Bezeichnung beibehält, auch für ein stumpfwinkliges Dreieck buchstäblich derselbe. — Die drei Höhen eines rechtwinkligen Dreiecks durchschneiden sich in dem Scheitel des rechten Winkels.

Anm. 3. In einem gleichseitigen Dreiecke fallen alle vier im vorhergehenden §. behandelten Punkte in einen, nehmlich in den Mittelpunkt des regelmäßigen Dreiecks zusammen. (S. §. 149.)

Anm. 4. Auch die drei Hilfslinien AM, CF und BH (Fig. 112) im Pythagoras schneiden sich in dem nehmlichen Punkte. Denn nach §. 207 ist

$$1)\quad BL : CL = AB^2 : AC^2.$$

Bezeichnen wir ferner den Durchschnittspunkt der Linien CF und AB mit X, so ist in den ähnlichen Dreiecken BXF und AXC

$$2)\quad AX : BX = AC : BF = AC : AB:$$

und wenn wir den Durchschnittspunkt der Linien BH und AC mit Z bezeichnen, so ist in den ähnlichen Dreiecken BAZ und HCZ

$$3)\quad CZ : AZ = CH : AB = AC : AB.$$

Multipliciren wir die Gleichungen (1), (2) und (3) mit einander, so erhalten wir

$$BL . AX . CZ : CL . BX . AZ = 1.$$

B. Von den Segmenten der Grundlinie eines Dreiecks.

*§. 229. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ist das Rechteck aus der Summe und der Differenz der beiden Seiten gleich dem Rechtecke aus der Summe und der Differenz der Segmente der Grundlinie, also wenn man in dem Dreiecke ABC (Fig. 152 und 153) die Höhe CD zieht, die größere Seite BC mit a, die kleinere AC mit b bezeichnet, ferner BD = p und AD = q setzt:

$$(a+b).(a-b) = (p+q).(p-q).$$

Beweis. In den rechtwinkligen Dreiecken BCD und ACD ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze: $a^2 = h^2 + p^2$
und $b^2 = h^2 + q^2$,
folglich wenn wir subtrahiren:

$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2.$$

Diese Gleichung ist aber nach einer bekannten Regel der Algebra nicht verschieden von der zu erweisenden

$$(a+b).(a-b) = (p+q).(p-q).$$

Anm. Man kann dieser Gleichung auch die Form einer Proportion geben

$$a+b : p+q = p-q : a-b$$

und dieselbe dann leicht aus §. 200, 3 herleiten, indem man um die Spitze des Dreiecks mit der kleineren Seite einen Kreis beschreibt und die größere Seite bis zum abermaligen Einschnitt in diesen Kreis verlängert.

Uebrigens wird man durch die erwiesene Gleichung in den Stand gesetzt, wenn von den folgenden Stücken $a+b$, $a-b$, $p+q$ und $p-q$ irgend drei gegeben sind, das vierte mit Leichtigkeit zu bestimmen.

*§. 230. Zusatz.

Wenn man sich über der Grundlinie AB (Fig. 152 und 153) mehrere Dreiecke so verzeichnet denkt, daß ihre Spitzen in beliebige Punkte des Lothes CD oder der Verlängerung desselben fallen, so haben diese Dreiecke sämmtlich die nehmlichen Segmente der Grundlinie (p und q), und es hat daher zu Folge des vorhergehenden §. auch in allen die Differenz der Quadrate der beiden Seiten ($a^2 - b^2$) dieselbe Größe. Hieraus folgt:

Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen der Unterschied der Quadrate seiner Abstände von zwei festen Punkten (A und B) gegeben ist, ist eine gerade Linie, welche auf der Verbindungslinie dieser beiden Punkte senkrecht steht.

C. Von der Mittellinie und der Halbirungslinie eines Winkels im Dreiecke.

*§. 231. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate aller vier Seiten, (d. h. gleich der doppelten Summe der Quadrate zweier zusammenstoßenden Seiten).

Beweis. Wenn das gegebene Parallelogramm ein Rechteck ist, so bildet jede Diagonale mit zwei zusammenstoßenden Seiten ein rechtwinkliges

Dreieck, und die Richtigkeit des aufgestellten Satzes folgt dann unmittelbar aus dem pythagoräischen Lehrsatze.

Um dasselbe ferner auch für ein schiefwinkliges Parallelogramm ABCD (Fig. 154) darzuthun, ziehen wir die Höhe CE und durch C mit BD eine Parallele, welche die verlängerte Grundlinie AB in F durchschneidet. Setzen wir nun der Kürze wegen AB = CD = a, AD = BC = b, AC = d, BD = e, ferner CE = h und BE = u, so ist auch CF = e und BF = a, folglich EF = a — u. Nun ist in den rechtwinkligen Dreiecken CEA und CEF

$$d^2 = h^2+(a+u)^2 = h^2+a^2+2au+u^2,$$

und

$$e^2 = h^2+(a-u)^2 = h^2+a^2-2au+u^2,$$

folglich, wenn wir addiren:

$$d^2+e^2 = 2h^2+2a^2+2u^2,$$

oder da in dem rechtwinkligen Dreiecke BEC $h^2+u^2 = b^2$ ist:

$$d^2+e^2 = 2a^2+2b^2, \text{ w. z. e. w.}$$

Anm. 1. Wenn man in dem Parallelogramm ABCD die größere Seite AB als Grundlinie annimmt, also $a > b$ voraussetzt, so ist auch im Dreiecke ABD Winkel DAB > DBA, also Winkel DBA = CFE nothwendig spitz; es muß daher die aus dem Scheitelpunkte des spitzen Winkels BCD auf die verlängerte Grundlinie AB gefällte Höhe CE innerhalb des Dreiecks CBF fallen. Man hat dann bei dem eben geführten Beweise nicht nöthig, den Fall noch besonders zu berücksichtigen, wenn die Höhe h außerhalb des Dreiecks CBF fällt, was nur geschehen kann, wenn man die kleinere Seite des Parallelogramms zur Grundlinie wählt.

Anm. 2. Auch folgender Satz ist leicht zu erweisen: In jedem Vierecke ist die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen vermehrt um das Vierfache des Quadrats der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Diagonalen.

*§. 232. Zusatz.

In jedem Dreiecke ist die Summe der Quadrate der beiden Seiten (a und b) gleich der Summe aus dem doppelten Quadrate der halben Grundlinie (g*) und dem doppelten Quadrate der zugehörigen Mittellinie (t, d. h. der Linie, welche die Spitze mit der Mitte der Grundlinie verbindet**).

Beweis. Wenn man das Dreieck ABC (Fig. 155) zum Parallelogramm ABCD vervollständigt, so ist nach dem vorhergehenden §.

$$2a^2+2b^2 = (2g)^2+(2t)^2 = 4g^2+4t^2,$$

folglich

$$a^2+b^2 = 2g^2+2t^2, \text{ w. z. e. w.}$$

Anm. Da man in einem Dreiecke jede beliebige Seite als Grundlinie annehmen kann, so gilt der eben angeführte Beweis nicht bloß für eine bestimmte, sondern für jede willkührliche Seite des Dreiecks.

*§. 233. Zusatz.

Da zu Folge des vorhergehenden §. durch die Summe der Quadrate

---

*) Wo also g nicht die ganze, sondern die halbe Grundlinie bezeichnet.

**) Dieser und der vorhergehende Satz werden in den geometrischen Lehrbüchern gewöhnlich aus einem geometrischen Satze abgeleitet, welcher eine Nachbildung der trigonometrischen Formel ist $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$.

Ich habe diesen Satz absichtlich und, wie ich glaube, aus guten Gründen hier gänzlich übergangen. D. Verf.

der beiden Seiten (a^2+b^2) und durch die Grundlinie ($2g$) eines Dreiecks die Mittellinie bestimmt wird, so folgt hieraus:

Der geometrische Ort eines Punktes C (Fig. 155), für welchen die Summe der Quadrate seiner Abstände von zwei festen Punkten A und B gegeben ist, ist ein (mit t beschriebener) Kreis, dessen Mittelpunkt in der Mitte der Linie AB liegt.

*§. 234. Zusatz.

1) Das Quadrat einer Seite im Dreiecke, welche einem spitzen Winkel gegenüberliegt, ist kleiner als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten.

2) Im stumpfwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite größer, als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten.

3) Ein Dreieck ist daher nothwendig rechtwinklig, wenn das Quadrat einer Seite der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten gleich ist.

Beweis. Man ergänze das gegebene Dreieck ABC (Fig. 155) zum Parallelogramm ADBC.

Wenn nun 1) Winkel $ACB < 90^0$ ist, so ist Winkel $CBD > 90^0$ und daher in den Dreiecken ACB und DBC nach §. 74 $AB < CD$, also $g < t$. Nun ist aber nach dem vorhergehenden §.

$$2g^2+2t^2 = a^2+b^2$$

und folglich, da $g < t$ ist: $4g^2 < a^2+b^2$,

d. h. $AB^2 < AC^2+BC^2$.

2) Wenn aber Winkel ACB ein stumpfer sein sollte, dann würde $AB > CD$, also $g > t$ und folglich

$$4g^2 > a^2+b^2,$$

d. h. $AB^2 > AC^2+BC^2$ sein.

Nro. 3 aber ergiebt sich als eine unmittelbare Folge von Nro. 1 und 2.

Anm. Von Nro. 3 des vorhergehenden §. machen Handwerker zuweilen Gebrauch, um einen rechten Winkel zu construiren. Da nehmlich $5^2 = 3^2+4^2$, d. h. $25 = 9+16$ ist, so geben die drei Seiten 3, 4 und 5 mit einander verbunden allemal ein rechtwinkliges Dreieck. Man nennt dergleichen rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten ein rationales Verhältniß zu einander haben, pythagoräische, auch wohl ägyptische. Außer dem angeführten Beispiele 3, 4, 5 hier noch folgende: 5, 12, 13; — 8, 15, 17; — 7, 24, 25; — vergl. Arithmetik und Algebra, §. 322.

*§. 235. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ist das Rechteck der beiden Seiten (a und b) gleich der Summe aus dem Quadrate der Halbirungslinie (l) des Winkels an der Spitze und dem Rechtecke der beiden Abschnitte (m und n), in welche sie die Grundlinie theilt, — in Zeichen: $a \cdot b = l^2+m \cdot n$.

Beweis. Man beschreibe einen Kreis um das gegebene Dreieck ABC (Fig. 156), verlängere die Linie CD, welche den Winkel an der Spitze halbirt, bis sie die Peripherie in E schneidet, und ziehe BE. Dann ist Winkel $A = E$, und da Winkel $ACD = BCE$ vorausgesetzt ist, folglich $\triangle\ ACD \sim ECB$; daher verhält sich

$$AC : CE = CD : BC \text{ oder } b : l+DE = l : a.$$

Aus dieser Proportion ergiebt sich

$$a \,.\, b = l \,.\, (l + DE) = l^2 + l \,.\, DE,$$

oder da nach §. 200, 1 $l \,.\, DE = m \,.\, n$ ist:

$$a \,.\, b = l^2 + m \,.\, n, \text{ w. z. e. w.}$$

Anm. Durch die vorstehende Gleichung

$$l^2 = ab - m \,.\, n$$

werden wir auch in den Stand gesetzt, die Halbirungslinie eines Winkels in einem Dreiecke zu berechnen, wenn die drei Seiten desselben gegeben sind. Nach §. 186 verhält sich nehmlich $m : n = a : b$,

folglich wenn wir $m + n = c$ setzen:

$$m : c = a : a + b$$

und

$$n : c = b : a + b.$$

Demnach ist

$$m = \frac{ac}{a+b} \text{ und } n = \frac{bc}{a+b}.$$

Setzen wir diese Werthe in die obige Gleichung ein, so ergiebt sich

$$l^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = \frac{ab((a+b)^2 - c^2)}{(a+b)^2}$$

oder

$$l^2 = \frac{ab(a+b+c) \,.\, (a+b-c)}{(a+b)^2}.$$

D. Von Dreiecken und Vierecken im Kreise.

*§. 236. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ist das Rechteck aus den beiden Seiten (a und b) gleich dem Rechtecke aus der Höhe (h) und dem Durchmesser (2r) des umschriebenen Kreises (Fig. 157).

Beweis. Man ziehe AE; dann ist Winkel CAE $= 90^0 =$ CDB und Winkel E = B, folglich △ EAC ∾ BDC; daher verhält sich

$$CE : AC = BC : CD \text{ oder } 2r : b = a : h;$$

also ist

$$a \,.\, b = 2r \,.\, h, \text{ w. z. e. w.}$$

Anm. Die Figur ist für den Fall entworfen, wenn beide an der Grundlinie liegende Winkel spitz sind. Wenn einer der Winkel an der Grundlinie, z. B. A, ein stumpfer oder rechter sein sollte, so sind die Winkel an der gegenüberliegenden Seite a gewiß spitz, und wenn wir die auf diese Seite gefällte Höhe = k und die Seite AB = c setzen, so ist nach dem eben Erwiesenen

$$1) \quad b \,.\, c = 2r \,.\, k.$$

Nun ist aber

$$2) \quad a \,.\, k = c \,.\, h,$$

weil jedes dieser Producte den doppelten Inhalt des Dreiecks ABC ausdrückt; folglich wenn wir die Gleichungen (1) und (2) mit einander multipliciren:

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, k = 2r \,.\, c \,.\, h \,.\, k, \text{ also } a \,.\, b = 2r \,.\, h.$$

*§. 237. Der ptolemäische Lehrsatz.

In einem Vierecke ABCD (Fig. 158), um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, ist das Rechteck der Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke der gegenüberstehenden Seiten; in Zeichen

$$f \,.\, g = a \,.\, c + b \,.\, d.$$

Beweis. Man mache Winkel BCE = DCA; dann ist △ BCE ∾ ACD, weil auch Winkel DBC = DAC ist; daher verhält sich

$$BE : AD = BC : AC \text{ oder } BE : d = b : f,$$

und folglich ist 1) $f . BE = b . d$.

Ferner ist auch $\triangle DCE \sim ACB$, weil Winkel $DCE = \alpha + \beta = ACB$ und Winkel $CDB = CAB$ ist; es verhält sich daher

$$DE : AB = DC : AC \text{ oder } DE : a = c : f;$$

also ist 2) $f . DE = a . c$.

Wenn wir nun die Gleichungen (1) und (2) addiren, so ergiebt sich

$$3) \quad f . (BE + DE) \text{ oder } f . g = a . c + b . d, \text{ w. z. e. w.}$$

E. Vom goldenen Schnitte und dem regelmäßigen Fünfecke.

Bemerkung. Aus den früheren Abschnitten ist leicht zu sehen, wie man in einen Kreis ein regelmäßiges Dreieck, Viereck und Sechseck zeichnet; (vergl. §. 146 und §. 148). Durch Halbirung der Kreisbogen kann man noch leicht das Achteck, Sechzehneck, Zweiunddreißigeck u. s. f. und das Zwölfeck, Vierundzwanzigeck, Achtundvierzigeck u. s. w. zeichnen. Die Construction der hier nicht genannten Vielecke ist theils verwickelter, theils noch gar nicht gefunden. Ziemlich leicht ist noch die Zeichnung des Fünfecks. Zu dieser führt folgende Ueberlegung: Die Aufgabe, ein Fünfeck zu zeichnen, ist offenbar von der, das Zehneck zu zeichnen, nicht wesentlich verschieden. Ist nun z. B. AB (Fig. 159) die Seite des Zehnecks, C der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, so ist im gleichschenkligen Dreieck ABC der Winkel an der Spitze die Hälfte des Winkels an der Grundlinie, nehmlich $C = 36^0$, folglich $A = B = 72^0$. Halbirt man einen Winkel an der Grundlinie A durch AD, so ist Winkel $BAD = 36^0$, Winkel $B = 72^0$, folglich auch $ADB = 72^0$, daher $\triangle BDA \sim ABC$ und $AB = AD = DC$, weil Winkel $DAC = 36^0 = DCA$ ist. Nun verhält sich in den ähnlichen Dreiecken ABC und BDA:

$$BC : AB = AB : BD$$

oder

$$BC : CD = CD : BD.$$

Hierdurch wird die Zeichnung des Fünfecks auf die Auflösung der folgenden Aufgabe zurückgeführt.

§. 238. Aufgabe.

Eine gegebene Linie BC (Fig. 160) nach dem goldenen Schnitte oder in stetiger Proportion zu theilen, d. h. den Punkt D zwischen B und C so zu bestimmen, daß der größere Abschnitt CD mittlere Proportionale wird zwischen der ganzen Linie BC und dem kleineren Abschnitte BD.

Aufl. Man errichte in B das Loth $BE = \frac{1}{2}BC$, beschreibe aus E mit EB einen Kreis, ziehe CE, welche den Kreis in F und G durchschneidet, und mache $CD = CF$, so ist D der gesuchte Theilungspunkt.

Beweis. Nach §. 200, 3 ist:

$$CG : BC = BC : CF,$$

folglich auch

$$CG - BC : BC - CF = BC : CF,$$

d. h.

$$CD : BD = BC : CD$$

oder

$$BC : CD = CD : BD.$$

§. 239. Aufgabe.

In einen Kreis ein regelmäßiges Fünfeck oder Zehneck zu zeichnen.

Aufl. Man ziehe einen beliebigen Radius CB (Fig. 159), theile denselben in stetiger Proportion, so daß sich verhält

$$1)\quad BC : CD = CD : BD.$$

Dann ist CD die Seite des Zehnecks und folglich, wenn man CD = AB = AE macht, BE die Seite des Fünfecks.

Beweis. Man ziehe AC und AD; dann ist nach (1)

$$BC : AB = AB : BD,$$

folglich nach §. 192 $\triangle$ ABC $\backsim$ DBA, und daher Winkel $\beta = C$ und Seite AD = AB = CD, also auch Winkel $\alpha = C$. Demnach ist W. $A = 2C = B$, folglich $A + B + C = 5C$ und $C = \frac{180^0}{5} = 36^0$. Dem zu Folge ist der Bogen AB zehnmal in der Peripherie enthalten, und daher die Linie AB die Seite des Zehnecks.

*§. 240. Zusatz.

Außer den Vielecken, die durch Verdoppelung der Seitenzahl des Zehnecks erhalten werden (Zwanzigeck, Vierzigeck u. dgl.), lassen sich nun auch das Fünfzehneck, Dreißigeck u. s. f. in den Kreis zeichnen. Macht man nehmlich die Sehne FG = der Seite des Zehnecks (Fig. 15), FH = der Seite des Sechsecks, d. h. ist der Bogen FG = $1/_{10}$, FH = $1/_{6}$, so ist GH = $1/_{6} - 1/_{10} = 1/_{15}$ von der ganzen Peripherie, also Sehne GH = der Seite des Fünfzehnecks.

F. Von harmonischen Punkten.

*§. 241. Erklärung.

Wenn auf einer geraden Linie zwei feste Punkte A und B (Fig. 161) gegeben sind, so existiren allemal zwei Punkte C und D, deren Abstände von A und B das nehmliche vorgeschriebene Verhältniß m : n haben, so daß sich also verhält: $AC : BC = AD : BD = m : n.$

Die beiden Punkte A und B heißen die Hauptpunkte; C wird der innere, D der äußere Theilungspunkt genannt. Alle vier Punkte A, B, C und D heißen harmonische.

Anm. 1. In der Figur ist AC = 2BC und AD = 2BD. — Der äußere Theilungspunkt D fällt in die Verlängerung über B, wenn zu Folge des vorgeschriebenen Verhältnisses AD > BD sein soll; er würde aber natürlich in die Verlängerung über A fallen, wenn AD < BD vorgeschrieben wäre.

Anm. 2. Wenn der innere Theilungspunkt C in die Mitte zwischen A und B fällt, so rückt der äußere Theilungspunkt in unendliche Entfernung hinaus. — Setzen wir der Kürze wegen AB = a, und nehmen wir ferner

$$AC : BC = m : n = AD : BD$$

an, so ist $AC : AC + BC$, d. h. $AC : a = m : m + n$,

also $$AC = \frac{a \cdot m}{m + n}.$$

Eben so finden wir $$BC = \frac{a \cdot n}{m + n}.$$

Weiter verhält sich $AD : AD - BD$, d. h. $AD : a = m : m - n$,

also ist $$AD = \frac{a \cdot m}{m - n}.$$

Eben so findet man $BD = \frac{a \cdot n}{m-n}$.

Die Werthe von AD und BD werden um so größer, je weniger m von n verschieden ist, und sie werden unendlich, wenn man $m = n$ annimmt.

*§. 242. Zusatz.

Man kann auch C und D als Hauptpunkte und A als äußeren, B als inneren Theilungspunkt annehmen. — Denn wenn die Proportion $AC : BC = AD : BD$
gegeben ist, so verhält sich auch
$$BD : BC = AD : AC.$$
Man nennt daher überhaupt je zwei zusammengehörige Punkte, wie A und B oder C und D, zugeordnete Punkte.

*§. 243. Aufgabe.

Zu drei in einer Linie gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt zu finden.

Aufl. Wir behandeln hier nur den einen Fall, daß die beiden Hauptpunkte A und B und der innere Theilungspunkt C gegeben sind, und der äußere Theilungspunkt gesucht werden soll, da alle anderen Fälle eben so leicht zu behandeln sind.

Um zu den drei gegebenen Punkten A, B, C den vierten harmonischen Punkt zu finden, lege man in A an AB einen beliebigen Winkel DAE, mache $Ac = AC$ und $bc = BC$, verbinde b mit B und ziehe durch c mit bB eine Parallele, welche die verlängerte AB in D schneidet, welches der gesuchte Punkt ist. — Denn, da $bB \parallel cD$ ist, so verhält sich
$$AD : BD = Ac : bc = AC : BC.$$

*§. 244. Lehrsatz.

Wenn auf einer Linie vier harmonische Punkte A, B, C und D (Fig. 162) gegeben sind und man beschreibt um den Abstand zweier zugeordneten Punkte C und D als Durchmesser einen Kreis, so haben die Abstände sämmtlicher Punkte dieses Kreises von den beiden anderen zugeordneten Punkten A und B das nehmliche Verhältniß zu einander.

Beweis. Es sei E ein willkührlicher Punkt auf dem Kreise, so ist zu beweisen, daß sich verhält:
$$AE : BE = AC : BC.$$
Um dieses zu zeigen, verbinde man E mit dem Mittelpunkte M; dann ist $\triangle AME \backsim EMB$. Denn nach der Voraussetzung verhält sich
$$1)\quad AD : BD = AC : BC;$$
folglich verhält sich auch
$$AD + AC : BD + BC = AC : BC$$
und
$$AD - AC : BD - BC = AC : BC.$$
Nun ist aber
$$AD + AC = AC + CD + AC = 2AC + 2CM = 2AM$$
$$BD + BC = CD = 2CM = 2EM$$
$$AD - AC = CD = 2CM = 2EM$$
$$BD - BC = BM + DM - BC = BM + CM - BC = 2BM.$$

Diese Werthe in die beiden letzten Proportionen eingesetzt verwandeln dieselben in

2) AM : EM = AC : BC

und

3) EM : BM = AC : BC.

Hieraus folgt

4) AM : EM = EM : BM.

Demnach stimmen die Dreiecke AME und EMB in einem gemeinschaftlichen Winkel M und dem Verhältnisse der einschließenden Seiten überein und sind folglich nach §. 192 einander ähnlich. Es verhält sich daher auch

5) AE : BE = AM : EM,

folglich auch vermöge der Proportion (2)

6) AE : BE = AC : BC, w. z. e. w.

Dasselbe kann eben so von jedem andern Punkte auf dem um CD als Durchmesser beschriebenen Kreise erwiesen werden.

Anm. Aus der so eben erwiesenen Proportion und §. 186 folgt, daß Winkel AEB durch die Linie CE halbirt wird.

*§. 245. Aufgabe.

Den geometrischen Ort eines Punktes zu finden, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten A und B (Fig. 162) ein vorgeschriebenes Verhältniß zu einander (m : n) haben.

Aufl. Man theile die Linie AB (Fig. 162) im Punkte C nach dem Verhältnisse m : n, suche zu den drei Punkten A, C und B den vierten harmonischen Punkt D und beschreibe um CD als Durchmesser einen Kreis, so ist dieser der gesuchte geometrische Ort.

Der Beweis ist im vorhergehenden §. enthalten.

Uebungsaufgaben.

Aufgabe 336 — 337. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind die Segmente der Grundlinie und

336) die Summe der beiden Seiten;

337) der Unterschied der beiden Seiten.

Aufgabe 338 — 343. Den geometrischen Ort für die Spitze eines Dreiecks zu bestimmen, von welchem gegeben sind:

338) die Grundlinie und die Höhe;

339) die beiden Segmente der Grundlinie;

340) die Grundlinie und der Winkel an der Spitze;

341) die Grundlinie und die Summe der Quadrate der beiden Seiten;

342) die Grundlinie und der Unterschied der Quadrate der beiden Seiten;

343) die Grundlinie und das Verhältniß der beiden Seiten *).

Aufgabe 344. Innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks einen Punkt so zu bestimmen, daß seine Abstände von den drei Ecken des Dreiecks in vorgeschriebenen Verhältnissen zu einander stehen.

Aufgabe 345. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze und die beiden Abschnitte gegeben sind, in welche diese Linie die Grundlinie theilt.

---

*) Verbindet man je zwei dieser sechs Oerter in eine Aufgabe, so erhält man fünfzehn bestimmte Aufgaben, welche die Zeichnung eines Dreiecks erfordern.

Aufgabe *345. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die beiden Seiten und der Winkel, unter welchem die Mittellinie die Grundlinie schneidet, gegeben sind.

Aufgabe 346 — 348. Ein Viereck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

346) die beiden Diagonalen, zwei zusammenstoßende Seiten und das Verhältniß der beiden anderen Seiten;

347) eine Diagonale und zwei mit derselben ein Dreieck bildende Seiten und die Verhältnisse zwischen den nicht gegebenen Seiten und der nicht gegebenen Diagonale;

348) zwei zusammenstoßende Seiten und drei von den Winkeln, welche die anderen Seiten mit den Diagonalen bilden.

Aufgabe 349. Ueber dem Radius eines Kreises zwei einander ähnliche gleichschenklige Dreiecke zu zeichnen, daß sie den Radius zur Summe der Grundlinie haben und ihre Spitzen in den Kreis fallen.

Aufgabe 350. Eine gegebene Linie so zu verlängern, daß die Verlängerung mittlere Proportionale wird zwischen der gegebenen Linie und der ganzen verlängerten Linie.

Zwölfter Abschnitt.

Vergleichung des Inhalts und Umfangs geradliniger Figuren.

*§. 246. Lehrsatz.

1) Von allen Dreiecken mit gleicher Grundlinie und gleichem Inhalte hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang, und umgekehrt

2) von allen Dreiecken mit gleicher Grundlinie und gleichem Umfang hat das gleichschenklige den größten Inhalt.

Beweis. 1) Ueber derselben Grundlinie AB (Fig. 163) sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC und ein beliebiges anderes Dreieck ABD verzeichnet. Da beide Dreiecke gleichen Inhalt haben sollen, so müssen auch ihre Höhen gleich sein; folglich ist $CD \parallel AB$. — Verlängern wir nun AC über C um $CE = CB$ und ziehen ED, so ist $\triangle ECD \cong BCD$, weil Winkel $ECD = CAB = CBA = BCD$, ferner $CD = CD$ und $CE = CB$ ist; folglich ist auch $DE = DB$. Nun ist aber

$$AD + DE > AE,$$

also auch

$$AD + BD > AC + BC.$$

Demnach hat das Dreieck ADB einen größeren Umfang, als das gleichschenklige ACB.

2) Wenn das gleichschenklige Dreieck ABC (Fig. 164) mit irgend einem andern Dreiecke DEF eine gleiche Grundlinie $AB = DE$ und gleichen Umfang hat, also $AC + BC = DF + EF$ ist, so hat das gleichschenklige Dreieck ABC einen größeren Flächeninhalt, als das Dreieck DEF. Denn wenn wir das Dreieck DEF in ein gleichschenkliges Dreieck DHE von gleichem Flächeninhalt verwandeln, so hat dieses letztere nach Nro. 1 einen kleineren Umfang, als das Dreieck DEF, und folglich auch einen kleineren Umfang, als das Dreieck ABC. Da die Grundlinie $AB = DE$ vorausgesetzt ist, so muß folglich die Seite $DH < AC$, und wie leicht zu sehen, daher auch die Höhe

HK $<$ CG sein. Dem zu Folge ist $\triangle$ DHE $<$ ABC, also auch $\triangle$ DFE $<$ ABC, w. z. e. w.

*§. 247. Zusatz.

1) Von allen Dreiecken mit gleichem Umfange hat das gleichseitige den größten Inhalt, und

2) von allen Dreiecken mit gleichem Inhalte hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

Beweis. 1) Wenn in einem Dreiecke vom größten Inhalte ABC (Fig. 31) irgend eine Seite der andern ungleich, z. B. AC $>$ BC sein sollte, so könnte man über der dritten Seite AB als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck ABX mit dem nehmlichen Umfange zeichnen, indem man nehmlich die Seite $AX = BX = \frac{AC + BC}{2}$ machte. Dann wäre nach Nro. 2 des vorhergehenden §. das gleichschenklige $\triangle$ ABX $>$ ABC, und folglich könnte $\triangle$ ABC nicht das größte Dreieck von vorgeschriebenem Umfange sein. — Demnach müssen in dem Dreiecke vom größten Inhalte alle drei Seiten einander gleich sein.

2) Wenn ein gleichseitiges Dreieck A und ein ungleichseitiges B einerlei Inhalt haben, so hat das Dreieck A einen kleineren Umfang. Denn wenn wir ein gleichseitiges Dreieck C zeichnen, welches mit B denselben Umfang hat, so ist zu Folge Nro. 1 dem Flächeninhalt nach $\triangle$ C $>$ B, also auch $\triangle$ C $>$ A. Folglich muß auch die Seite des gleichseitigen Dreiecks C größer, als die Seite des gleichseitigen Dreiecks A, also der Umfang von C größer, als der Umfang von A sein. Demnach ist, da B und C einerlei Umfang haben, der Umfang des ungleichseitigen Dreiecks B größer, als der Umfang des gleichseitigen Dreiecks A, welches mit B gleichen Flächeninhalt hat.

*§. 248. Lehrsatz.

1) Von allen Dreiecken, welche in zwei Seiten übereinstimmen, hat dasjenige den größten Inhalt, bei welchem diese beiden Seiten einen rechten Winkel einschließen.

2) Von allen Parallelogrammen, welche in zwei Seiten übereinstimmen, hat das Rechteck den größten Inhalt.

Beweis. Denn wenn wir eine der gegebenen Seiten als Grundlinie annehmen, so hat offenbar dasjenige Dreieck oder Parallelogramm, in welchem die andere gegebene Seite auf der Grundlinie senkrecht steht, die größte Höhe, also auch den größten Inhalt.

*§. 249. Lehrsatz.

1) Unter allen Rechtecken mit gleichem Inhalte hat das Quadrat den kleinsten Umfang, und

2) von allen Rechtecken mit gleichem Umfange hat das Quadrat den größten Inhalt.

Beweis. 1) Wenn das Quadrat CDEF und das Rechteck BDGH (Fig. 113) einerlei Inhalt haben, so ist die Seite des Quadrats die mittlere Proportionale zwischen den beiden Seiten des Rechtecks; also muß, wenn wir AD $=$ DG machen und über AB einen Halbkreis beschreiben, dieser durch den Punkt C gehen. Nun ist aber CD kleiner, als der Radius, also 2CD $<$ AB und folglich der Umfang des Quadrats CDEF kleiner, als der Umfang des Rechtecks BDGH.

Zu dem nehmlichen Ergebnisse gelangt man auch auf folgendem Wege: Wenn das Quadrat ABCD (Fig. 165) gleich dem Rechtecke AEFG ist, so muß auch △ ADB = AGE, also auch △ BGD = △ BGE, folglich DE ∥ BG sein; es muß sich daher verhalten

$$BE : DG = AB : AG.$$

Nun ist aber AB = AD > AG, also auch BE > DG, folglich

$$AB + BE + AG > AB + AG + DG,$$

d. h.

$$AE + AG > AB + AD.$$

Demnach ist der Umfang des Quadrats ABCD kleiner, als der Umfang des ihm gleichen Rechtecks AEFG.

Nro. 2 läßt sich in ähnlicher Art aus Nro. 1 leicht indirect ableiten, wie dieß in §. 247 geschehen ist.

Anm. 1. Der so eben erwiesene Satz ist allerdings ein besonderer Fall des nun folgenden weit allgemeineren Satzes. Es dürfte indeß der Mühe lohnen, jenen wichtigen Satz, welcher so häufig Anwendung findet*), noch besonders erwiesen zu haben.

Anm. 2. Aus dem so eben erwiesenen Satze folgt auch noch, daß von allen rechtwinkligen Dreiecken mit gleicher Summe der Catheten das gleichschenklige den größten Inhalt hat.

*§. 250. Lehrsatz.

Von allen Vielecken mit einer vorgeschriebenen Seitenzahl und einem gleichen Umfange hat das regelmäßige den größten Inhalt.

Beweis. Wir haben hier Zweierlei zu erweisen: erstens, daß das größte Vieleck gleiche Seiten, und zweitens, daß es auch gleiche Winkel haben muß. Wir unterscheiden hierbei zwei Fälle:

1) Wenn die vorgeschriebene Seitenzahl eine gerade Zahl, z. B. gleich 8, ist. Es sei also das Achteck ABDEFGHK (Fig. 93) gegeben; wenn dieses größer sein soll, als jedes andere Achteck mit demselben Umfange, so muß dasselbe

erstens gleiche Seiten haben. Denn wenn irgend zwei zusammenstoßende Seiten, z. B. AK und KH, ungleich wären, so denke man sich AH gezogen, über AH als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck AXH construirt, welches mit AKH einerlei Umfang hat, (so daß also $AX = HX = \frac{AK + HK}{2}$ ist). Dann ist nach §. 246, 2 △ AXH > AKH, folglich auch Vieleck BDEFGHXA größer, als das Vieleck BDEFGHKA, welches mit ihm denselben Umfang hat. Es wäre also dieses nicht das größte Achteck, welches sich mit dem gegebenen Umfange umschließen ließe. Demnach muß das größte Achteck von vorgeschriebenem Umfange gleiche Seiten haben.

Zweitens muß dasselbe auch gleiche Winkel haben. Dieses wird, da wir schon seine Seiten als gleich erwiesen haben, offenbar statt finden, wenn sich zeigen läßt, daß dasselbe in einem Kreise liegt. Um dieses darzuthun, verbinden wir irgend zwei einander gegenüberliegende Ecken A und F. Dann muß zunächst Fünfeck ABDEF = FGHKA sein. Denn wenn einer dieser Theile größer, als der andere sein sollte, so würde, wenn man diesen Theil

*) Selbst den Schäfern pflegt es nicht unbekannt zu sein, daß, wenn sie ihre Hürden in rechteckiger Form aufstellen, der eingeschlossene Flächenraum dann am größten ist, wenn die Seiten des Rechtecks einander gleich sind.

an die andere Seite der Diagonale legte, ein Achteck entstehen, welches denselben Umfang, aber größeren Inhalt, als das Achteck ABDEFGHK hätte, welches gegen die Voraussetzung streitet. — Wenn wir nun irgend eine willkührliche Ecke D mit A und F verbinden, so muß Winkel ADF ein rechter sein. Denn angenommen, dieses wäre nicht der Fall, so denke man sich einen rechten Winkel adf gezeichnet, und von dem einen Schenkel AD = ad und vom andern DF = df abgeschnitten, ferner a mit f verbunden und über ad ein dem Dreiecke ABD congruentes Dreieck abd und eben so über df ein △ def ≌ DEF gezeichnet. Dann entstände ein Fünfeck abdef, welches größer, als ABDEF wäre, weil das rechtwinklige Dreieck adf nach §. 248, 1 größer, als das Dreieck ADF ist. Wenn wir nun an die andere Seite von af ein dem Fünfeck abdef congruentes Fünfeck zeichnen, so erhalten wir ein Achteck, welches ganz dieselben Seiten wie das gegebene Achteck ABDEFGHK, aber einen größeren Inhalt hat. Es wäre also dieses letztere nicht das größte Achteck, welches sich mit einem gegebenen Umfange einschließen läßt. Wenn also ABDEFGHK das größte Achteck sein soll, so muß der Winkel ADF ein rechter sein, also der um AF als Durchmesser beschriebene Halbkreis durch D gehen. Das Nehmliche kann in ähnlicher Art von den übrigen Ecken erwiesen werden. Also muß das größte Achteck ABDEFGHK in einem Kreise liegen, und da wir schon gesehen haben, daß es gleiche Seiten hat, so müssen offenbar auch seine Winkel (nach §. 145) einander gleich und das Vieleck selbst regelmäßig sein. — Dasselbe gilt eben so von jedem andern Vielecke mit einer geraden Seitenzahl.

2) Wenn aber die Seitenzahl eine ungerade, z. B. = 5, sein sollte, so sei Fünfeck ABCDE (Fig. 166) das größte, welches sich mit einem gegebenen Umfange umschließen läßt; dann läßt sich ganz in der nehmlichen Art zeigen, wie dieses in Nro. 1 für ein Achteck geschehen ist, daß dasselbe gleiche Seiten haben muß. Um nun weiter zu erweisen, daß es auch gleiche Winkel haben muß, nehmen wir das Gegentheil an, und denken uns ein regelmäßiges Fünfeck abcde gezeichnet, welches mit ABCDE dieselben Seiten hat, beschreiben um abcde einen Kreis und zeichnen über jeder Seite desselben ein gleichschenkliges Dreieck, welches zur Grundlinie eine Seite des regelmäßigen Fünfecks abcde und seine Spitze auf dem Kreise hat, so entsteht ein regelmäßiges Zehneck, welches wir mit Z bezeichnen wollen. Zeichnen wir nun über den Seiten des Fünfecks ABCDE eben solche gleichschenklige Dreiecke, wie über den Seiten des regelmäßigen Fünfecks abcde, so erhalten wir ein zweites Zehneck, welches mit Z in allen Seiten übereinstimmt und mit Y benannt sein soll. Da das Zehneck Z regelmäßig ist und mit Y denselben Umfang hat, so ist nach Nro. 1 $Z > Y$, folglich auch, wenn wir die gleichgemachten Dreiecke weglassen, Fünfeck abcde > ABCDE. Demnach wäre dieses nicht das größte Fünfeck von vorgeschriebenem Umfange. Es muß daher auch ein Vieleck von ungerader Seitenzahl, wenn es bei gegebenem Umfange das größte sein soll, regelmäßig sein.

*§. 251. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden Satze folgt leicht umgekehrt: — Unter allen Vielecken mit gleicher Seitenzahl und gleichem Inhalte hat das regelmäßige den kleinsten Umfang.

*§. 252. Lehrsatz.

1) Von zwei regelmäßigen Vielecken mit gleichem Umfange hat das mit der größeren Seitenzahl den größeren Inhalt, und

2) von zwei regelmäßigen Vielecken mit gleichem Inhalte hat das mit der größeren Seitenzahl einen kleineren Umfang.

Beweis. Wenn ABCDE (Fig. 166) ein regelmäßiges Fünfeck ist, und ich nehme auf einer Seite DE einen beliebigen Punkt X an, ziehe AX und denke mir über AX als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck AZX construirt, welches mit dem Dreiecke AEX denselben Umfang hat, so ist nach §. 246, 2 $\triangle$ AZX $>$ AEX, folglich auch das Sechseck BCDXZA größer, als das gegebene Fünfeck ABCDE, mit welchem es denselben Umfang hat. Nun ist aber das unregelmäßige Sechseck BCDXZA nach §. 250 kleiner, als ein regelmäßiges Sechseck von gleichem Umfange, um so mehr muß dasselbe von dem Fünfecke ABCDE gelten.

Eben so läßt sich zeigen, daß überhaupt jedes regelmäßige $(n+1)$eck größer ist, als ein regelmäßiges $n$eck von gleichem Umfange.*)

Nro. 2 folgt sehr leicht indirect aus (1).

*§. 253. Zusatz.

Da wir den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten ansehen, so folgt aus dem letzten Satze:

1) Unter allen Figuren, welche einen gleichen Umfang haben, hat der Kreis den größten Inhalt, und

2) von allen Figuren mit gleichem Inhalte hat der Kreis den kleinsten Umfang.

Dreizehnter Abschnitt.

Rechnungen.

*§. 254. Aufgabe.

Aus der Seite a eines gleichseitigen Dreiecks den Inhalt J zu berechnen.

Aufl. Zieht man die Höhe h (Fig. 167), so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze $h^2 + \frac{1}{4}a^2 = a^2$, also $h^2 = \frac{3}{4}a^2$

und folglich $h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Hieraus ergiebt sich $J = \frac{1}{2}a \,.\, h = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

Anm. Wenn man über der nehmlichen Linie a ein gleichseitiges Dreieck und ein Quadrat construirt, so verhält sich hiernach der Inhalt des Dreiecks zum Inhalt des Quadrats wie

$$\tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3} : a^2 = \sqrt{3} : 4 = 1,732.. : 4 = 0,433.. : 1.$$

Wenn aber ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck einerlei Umfang haben und man denkt sich diesen Umfang in zwölf gleiche Theile getheilt, so kommen auf eine Seite

---

*) Dieser sehr einfache Beweis ist der Abhandlung von Steiner in Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik B. 24, H. 2, S. 112 entnommen.

des Quadrats drei Theile und der Inhalt desselben ist folglich $= 9$; auf eine Seite des Dreiecks kommen vier Theile, und wenn wir in der obigen Formel $a = 4$ setzen, so ergiebt sich der Inhalt des Dreiecks $= \frac{1}{4} \cdot 16 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$. Demnach verhält sich bei gleichem Umfange der Inhalt des gleichseitigen Dreiecks zum Inhalt des Quadrats wie $4 \cdot \sqrt{3} : 9 = 6{,}928.. : 9 = 0{,}769.. : 1$.

*§. 255. Aufgabe.

Aus der Seite a und der Grundlinie c eines gleichschenkligen Dreiecks den Inhalt J zu berechnen. (Fig. 168.)

Aufl. Zieht man die Höhe h, so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}c^2, \text{ folglich } h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}c^2}$$

und daher

$$J = \frac{1}{2}c \cdot h = \frac{1}{2}c \cdot \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}c^2} = \frac{1}{2}c \cdot \sqrt{(a + \frac{1}{2}c) \cdot (a - \frac{1}{2}c)}.$$

*§. 256. Aufgaben.

Aus den drei Seiten a, b und c eines Dreiecks ABC (Fig. 152) den Inhalt J zu berechnen.

Aufl. Wir suchen zuerst die Höhe h zu bestimmen, und um diese zu erhalten, berechnen wir vorher die Segmente p und q. — In den rechtwinkligen Dreiecken ACD und BCD ist

$$h^2 = b^2 - q^2 = a^2 - p^2,$$

folglich $p^2 - q^2 = a^2 - b^2$,

oder $(p+q) \cdot (p-q) = a^2 - b^2$,

also $p - q = \frac{a^2 - b^2}{p+q}$,

oder da 1) $p + q = c$ ist:

2) $p - q = \frac{a^2 - b^2}{c}$;

folglich wenn wir addiren

$$2p = \frac{a^2 - b^2}{c} + c = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{c}$$

und 3) $p = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$.

Eben so finden wir, indem wir Gleichung (2) von (1) subtrahiren,

$$4)\quad q = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}.$$

Nun ist in dem rechtwinkligen Dreiecke BCD

$$5)\quad h = \sqrt{a^2 - p^2} = \sqrt{(a+p) \cdot (a-p)}.$$

Vermöge der Gleichung (3) ist aber

$$a + p = a + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} = \frac{2ac + a^2 - b^2 + c^2}{2c} = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2c}.$$

Denken wir uns in der bekannten algebraischen Formel $u^2 - v^2 = (u+v) \cdot (u-v)$, $u = a + c$ und $v = b$ gesetzt, so erhalten wir aus der letzten Gleichung 6) $a + p = \frac{(a+c+b) \cdot (a+c-b)}{2c}$.

Ferner ist vermöge der Gleichung (3)

$$a-p = a - \frac{(a^2-b^2+c^2)}{2c} = \frac{2ac-a^2+b^2-c^2}{2c} =$$

$$\frac{b^2-(a^2-2ac+c^2)}{2c} = \frac{b^2-(a-c)^2}{2c},$$

oder wenn wir in der Formel $u^2-v^2 = (u+u).(u-v)$, $u = b$ und $v = a-c$ setzen:

$$7)\quad a-p = \frac{(b+a-c).(b-a+c)}{2c}.$$

Setzen wir nun die in (6) und (7) gefundenen Resultate in die Gleichung (5) ein, so erhalten wir

$$8)\quad h = \frac{\sqrt{(a+b+c).(a+b-c).(a+c-b).(b+c-a)}}{2c}.$$

Bekanntlich ist $\quad 9)\quad J = {}^1/_2 c.h,$

also wenn wir den so eben gefundenen Werth von h einsetzen:

$$10)\quad J = {}^1/_4.\sqrt{(a+b+c).(a+b-c).(a+c-b).(b+c-a)}.$$

Anm. Dieser Ausdruck wird imaginär, wenn man eine Seite größer, als die Summe der beiden anderen annimmt; er verschwindet, wenn eine Seite der Summe der beiden anderen gleich ist; in allen anderen Fällen ist derselbe reell. — Ist z. B. $a = 8$, $b = 5$, $c = 6$, so ist $a+b+c = 19$, $a+b-c = 7$, $a+c-b = 9$ und $b+c-a = 3$, folglich

$$J = {}^1/_4.\sqrt{19.7.9.3} = {}^1/_4.\sqrt{3591} = {}^1/_4.59{,}92.. = 14{,}98..$$

Die obige Formel hat auch noch den praktischen Vorzug, daß sie ganz zum Rechnen mit Logarithmen geeignet ist.

Wird von dieser Rücksicht abgesehen, so würde die obige Rechnung auch den folgenden einfacheren Gang nehmen können:

Nachdem man so wie oben

$$p = \frac{a^2-b^2+c^2}{2c}$$

gefunden hat, ergiebt sich weiter

$$h^2 = a^2-p^2 = \frac{4a^2c^2-(a^2-b^2+c^2)^2}{4c^2}$$

$$= \frac{2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4c^2},$$

folglich $\quad 2hc = \sqrt{(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)}.$

Nun ist aber der gesuchte Inhalt $J = {}^1/_2 hc = {}^1/_4.2hc$,

also $\quad J = {}^1/_4\sqrt{(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)},$

eine, für das praktische Rechnen allerdings minder bequeme, in theoretischer Hinsicht jedoch merkwürdige Gleichung.

*§. 257. Aufgabe.

Aus den vier Seiten eines Trapezes a, b, c und d den Inhalt J zu berechnen. (Fig. 169.)

Aufl. Zieht man durch C mit AD die Parallele CE, so sind im Dreiecke BCE alle drei Seiten bekannt, nehmlich $BC = b$, $CE = d$ und $BE = a-c$. Es läßt sich daher der Inhalt dieses Dreiecks, welchen wir J' nennen wollen, nach der Formel des vorhergehenden §. berechnen. Nun

ist aber, wenn h die gemeinschaftliche Höhe des Dreiecks BCE und des Trapezes ABCD bezeichnet, nach §. 219 der Inhalt des Trapezes ABCD

$$J = \frac{1}{2}(a+c) . h$$

und der Inhalt des Dreiecks BCE

$$J' = \frac{1}{2}(a-c) . h,$$

folglich $$J : J' = a+c : a-c$$

und daher $$J = \frac{a+c}{a-c} . J'.$$

Anm. Ist z. B. $a = 12$, $b = 7$, $c = 8$ und $d = 6$ gegeben, so hat das Dreieck BCE die Seiten 7, 6 und 4. Nun ist $7+6+4 = 17$, $7+6-4 = 9$, $7+4-6 = 5$ und $6+4-7 = 3$, also der Inhalt des Dreiecks BCE

$$J = \frac{1}{4} . \sqrt{17 . 9 . 5 . 3} = \frac{1}{4} . \sqrt{2295}$$

und folglich, da $a+c : a-c = 20 : 4 = 5$ ist, der Inhalt des Trapezes

$$J = \frac{5}{4} . \sqrt{2295} = 59{,}88..$$

In allgemeinen Zeichen ausgedrückt ist der Inhalt des Trapezes

$$J = \frac{1}{4} . \sqrt{(a-c+b+d).(a-c+b-d).(a-c-b+d).(-a+c+b+d)}.$$

*§. 258. Aufgabe.

Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks 1) den Radius r des umschriebenen Kreises und 2) den Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises zu berechnen.

Aufl. 1) Nach §. 236 und §. 219 ist (Fig. 157)

$$2rh = ab \text{ und } \frac{1}{2}hc = J;$$

folglich, wenn wir, um h wegzuschaffen, diese beiden Gleichungen durch einander dividiren: $$\frac{4r}{c} = \frac{ab}{J} \text{ oder } r = \frac{abc}{4J},$$

wo man J auf die in §. 256 angegebene Art durch die drei Seiten auszudrücken hat.

2) Wenn man den Mittelpunkt M des in das Dreieck ABC (Fig. 90) beschriebenen Kreises mit den Ecken A, B und C verbindet, so ist

$$\triangle ABC = \triangle ABM + BCM + ACM.$$

Nun sind aber die Inhalte dieser Dreiecke, welche sämmtlich ϱ zur Höhe haben, beziehlich $\frac{1}{2}\varrho . c$, $\frac{1}{2}\varrho . a$ und $\frac{1}{2}\varrho . b$, also der Inhalt des ganzen Dreiecks ABC

$$J = \frac{1}{2}\varrho . (a+b+c), \text{ folglich } \varrho = \frac{2J}{a+b+c}.$$

*§. 259. Aufgabe.

1) Aus dem Radius r eines Kreises und der Seite a eines in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecks (von n Seiten) die Seite b eines in denselben Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecks von doppelt so viel (2n) Seiten zu berechnen, und umgekehrt

2) aus dem Radius r und der Seite b des 2necks die Seite a des necks zu finden. (Fig. 170.)

Aufl. In dem rechtwinkligen Dreiecke DFE ist

$$b = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + DF^2}.$$

Nun ist aber $DF = r - CF$ und in dem rechtwinkligen Dreiecke CFE

$$CF = \sqrt{r^2 - {}^1/_4 a^2}\text{, also } DF = r - \sqrt{r^2 - {}^1/_4 a^2}$$

und folglich, wenn wir quadriren:

$$DF^2 = r^2 - 2r\sqrt{r^2 - {}^1/_4 a^2} + r^2 - {}^1/_4 a^2 = 2r^2 - {}^1/_4 a^2 - 2r\sqrt{r^2 - {}^1/_4 a^2}.$$

Setzen wir diesen Werth in die obige Gleichung ein, so ergiebt sich

$$1)\quad b = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - {}^1/_4 a^2}}.$$

2) Wenn b gegeben und a zu berechnen ist, so erhalten wir aus dem rechtwinkligen Dreiecke DFE

$${}^1/_2 a = \sqrt{b^2 - DF^2}.$$

Nun ist aber, wenn wir EG ziehen, nach §. 199, IV

$$DF : b = b : DG = b : 2r\text{, also } DF = \frac{b^2}{2r}.$$

Setzen wir diesen Werth in die obige Gleichung ein, so ergiebt sich

$${}^1/_2 a = \sqrt{b^2 - \frac{b^4}{4r^2}} = \frac{\sqrt{4r^2b^2 - b^4}}{2r} = \frac{b \cdot \sqrt{4r^2 - b^2}}{2r},$$

also $$2)\quad a = \frac{b \cdot \sqrt{4r^2 - b^2}}{r}.$$

*§. 260. Aufgabe.

1) Aus dem Radius r eines Kreises und der Seite a eines regelmäßigen Vielecks in demselben die Seite c eines um den Kreis beschriebenen Vielecks von derselben Seitenzahl zu berechnen, und umgekehrt

2) aus dem Radius r und der Seite c des umschriebenen Vielecks die Seite a des eingeschriebenen Vielecks von gleicher Seitenzahl zu bestimmen. (Fig. 170.)

Aufl. 1) In den ähnlichen Dreiecken CFE und CDH verhält sich ${}^1/_2 c : {}^1/_2 a$, also auch:

$$c : a = CD : CF = r : \sqrt{r^2 - {}^1/_4 a^2};$$

folglich ist $$1)\quad c = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - {}^1/_4 a^2}}.$$

2) Ferner verhält sich in denselben Dreiecken ${}^1/_2 a : {}^1/_2 c$, also auch

$$a : c = CE : CH = r : CH,$$

oder da im rechtwinkligen Dreiecke CDH $CH = \sqrt{r^2 + {}^1/_4 c^2}$ ist:

$$a : c = r : \sqrt{r^2 + {}^1/_4 c^2};$$

folglich ist $$2)\quad a = \frac{cr}{\sqrt{r^2 + {}^1/_4 c^2}}.$$

*§. 261. Aufgabe.

Aus dem Radius r eines Kreises die Seite des in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Dreiecks, Vierecks, Fünfecks, Sechsecks und Zehnecks zu berechnen.

Aufl. 1) Die Seite des Sechsecks ist bekanntlich gleich dem Radius = r.

2) Das regelmäßige Dreieck sei ABC (Fig. 171); ziehen wir den Durchmesser CD, so halbirt dieser (wie man leicht einsieht) den Winkel ACB,

folglich auch den Bogen AB; demnach ist BD Seite des regelmäßigen Sechsecks $= r$, und daher im rechtwinkligen Dreieck CBD

$$x^2 + r^2 = 4r^2, \text{ also } x^2 = 3r^2$$

und

$$x = r\sqrt{3}.$$

3) Zur Bestimmung der Seite des Vierecks dient (Fig. 172) die Gleichung:

$$x^2 + x^2 = 4r^2, \text{ also } x^2 = 2r^2$$

und

$$x = r\sqrt{2}.$$

4) Nach §. 239 wird die Seite x des Zehnecks gefunden, wenn man den Radius in stetiger Proportion theilt, so daß sich verhält (Fig. 159)

$$r : x = x : r - x.$$

Hieraus folgt:

$$x^2 = r^2 - rx.$$

oder

$$x^2 + rx = r^2,$$

also

$$x = -\tfrac{1}{2}r + \sqrt{r^2 + \tfrac{1}{4}r^2}$$

$$= \frac{-r + \sqrt{5r^2}}{2} = \frac{r(-1 + \sqrt{5})}{2}.$$

5) Mit Hilfe der Gleichung (2) in §. 259 läßt sich nun auch leicht die Seite y des Fünfecks berechnen. Setzt man nehmlich in der angeführten Gleichung $a = y$, $b = x$, so erhält man:

$$y^2 = \frac{x^2(4r^2 - x^2)}{r^2}.$$

Nun ist aber so eben gefunden

$$y^2 = \frac{r^2(-1 + \sqrt{5})^2}{4} = \frac{r^2(1 - 2\sqrt{5} + 5)}{4} = \frac{r^2(3 - \sqrt{5})}{4},$$

folglich

$$4r^2 - x^2 = \frac{8r^2}{2} - \frac{r^2(3 - \sqrt{5})}{2} = \frac{r^2(5 + \sqrt{5})}{2}$$

und

$$\frac{x^2(4r^2 - x^2)}{r^2} = \frac{r^2(3 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}{4} = \frac{r^2(10 - 2\sqrt{5})}{4},$$

also

$$y = \frac{r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}.$$

*§. 262. Zusatz.

Nach dem vorhergehenden §. ist das Quadrat der Seite des Fünfecks

$$= \frac{r^2(10 - 2\sqrt{5})}{4} = \frac{r^2(5 - \sqrt{5})}{2}$$

und das Quadrat der Seite des Zehnecks

$$= \frac{r^2(3 - \sqrt{5})}{2},$$

folglich ihre Differenz $= r^2$.

Es bilden daher der Radius, die Seite des Fünfecks und die Seite des Zehnecks ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Seite des Fünfecks die Hypotenuse ist.

*§. 263. Zusatz.

Durch die Gleichung (1) in §. 259 wird man in den Stand gesetzt, die Seiten der regelmäßigen Vielecke im Kreise zu berechnen, welche 2, 4, 8... mal so viel Seiten haben, als eins der in §. 261 angegebenen, und

mit Hilfe der Gleichung (1) in §. 260 kann man auch die Seiten der um den Kreis beschriebenen Vielecke von den angezeigten Seitenzahlen bestimmen.

Bemerkung. In früherer Zeit hat man sich dieser Gleichungen bedient, um Näherungswerthe für die Zahl π, welche das Verhältniß zwischen Peripherie und Durchmesser ausdrückt, zu erhalten. Am bequemsten geht man hierbei vom Sechseck aus, da dessen Seite dem Radius gleich ist, sucht dann die Seite des Zwölfecks, Vierundzwanzigecks, Achtundvierzigecks u. s. w. im Kreise und bestimmt endlich die Seiten der zugehörigen Vielecke um den Kreis, so geben die Zahlen für die Umfänge dieser Vielecke Grenzen an, zwischen welchen die Peripherie enthalten ist. Man hat auf diese Art, indem der Radius als Einheit angenommen ist, gefunden:

am Kreise	die Seite des eingeschriebenen	die Seite des umschriebenen	den halben Umfang des ersteren	den halben Umfang des letzteren
6ecks	1,000000	1,154700	3,0000	3,4641 ....
12ecks	0,517638	0,535898	3,1058	3,2153 ....
24ecks	0,261052	0,263305	3,1326	3,1596 ....
48ecks	0,130806	0,131087	3,1393	3,1460 ....
96ecks	0,065438	0,065473	3,1410	3,1427 ....
192ecks	0,032723	0,032727	3,1414	3,1418 ....

Vierzehnter Abschnitt.

Von der geometrischen Construction algebraischer Ausdrücke.

*§. 264. Erklärung.

Bezeichnet man die in einer Betrachtung vorkommenden Maaßzahlen von Linien durch die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets a, b, c ... so nehmlich, daß man einerseits für die Maaßzahl jeder in der Betrachtung vorkommenden Linie allemal einen dieser Buchstaben (also kein anderes Zeichen, insbesondere keine bestimmte Zahl 1, 2, 3 u. dgl.) setzt und andererseits durch diese Buchstaben nichts anderes als Maaßzahlen von Linien vorstellt (also die Maaßzahlen anderer Größen, wenn deren zugleich mit in Betracht gezogen werden sollen, durch andere Zeichen ausdrückt,): so sagt man, jeder einzelne dieser Buchstaben habe eine Dimension, und von einem Producte, welches zwei, drei ... dieser Buchstaben zu Factoren hat, es habe zwei, drei ... Dimensionen.

So hat z. B. unter den angegebenen Voraussetzungen jedes der folgenden Producte zwei Dimensionen:

$$ab,\ 3fg,\ r^2\pi = rr\pi.$$

Die beiden letzten enthalten zwar drei Factoren, aber die Zeichen 3 und π haben nach dem Obigen auf die Anzahl der Dimensionen des Productes keinen Einfluß.

*§. 265. Erklärung.

1) und 2) Wenn man Ausdrücke, die gleich viele Dimensionen enthalten, addirt oder von einander subtrahirt, so hat die Summe oder Differenz eben so viel Dimensionen.

So haben z. B. die folgenden Ausdrücke

$$5abc + 3ax^2$$
$$2axy - bcz$$
$$a^2x - bcy + z^3$$

sämmtlich drei Dimensionen.

3) Wenn man zwei Ausdrücke mit einander multiplicirt, so hat das Product so viel Dimensionen, als beide zusammen.

So hat z. B. in dem Producte

$$(3ab).(5bcx) = 15ab^2cx$$

der erste Factor 2, der andere 3 und das Product 5 Dimensionen.

4) Die Zahl der Dimensionen eines Bruches wird erhalten, wenn man von der Zahl der Dimensionen des Zählers die Zahl der Dimensionen des Nenners subtrahirt. — Diese Differenz kann sowohl positiv, als Null oder negativ sein.

So ist z. B. in dem Ausdruck

$\frac{a^2 + bx}{c}$ die Zahl der Dimensionen $+1$,

$\frac{a^2b}{cdf}$ " " " " 0,

$\frac{x}{fgh}$ " " " " -2.

5) Erhebt man einen Ausdruck in die zweite, dritte . . . Potenz, so hat die Potenz zwei-, drei- . . . mal so viel Dimensionen.

So hat in dem folgenden Beispiel

$$(3abc)^2 = 9a^2b^2c^2$$

der Dignand 3 und die zweite Potenz 6 Dimensionen und in dem Beispiele

$$\left(\frac{2a^2}{b}\right)^3 = \frac{8a^6}{b^3}$$

der Dignand eine und die dritte Potenz drei Dimensionen.

6) Die Zahl der Dimensionen einer Wurzel wird gefunden, wenn man die Zahl der Dimensionen des Radicanden durch den Wurzelexponenten dividirt. — Dieser Quotient kann sowohl eine ganze, als auch eine gebrochene Zahl sein.

So hat z. B. die folgende Wurzel

$\sqrt{abcd}$ 2 Dimensionen

und $\sqrt{a^2x + bxy}$ $3/2$ "

*§. 266. Erklärung.

Im Folgenden sollen nur solche Ausdrücke, welche gleich viel Dimensionen haben, durch Addition und Subtraction verbunden werden. —

Eine algebraische Summe heißt homogen, wenn alle Glieder derselben gleich viel Dimensionen haben; eben so nennt man auch eine Gleichung homogen, wenn sich in allen Gliedern gleich viel Dimensionen finden.

*§. 267. Zusatz.

1) Der Ausdruck für die Maaßzahl einer Linie hat eine Dimension.

2) Der Ausdruck für die Maaßzahl einer Fläche hat zwei Dimensionen.

Beweis. 1) Die Richtigkeit dieser Behauptung ist eine unmittelbare Folge der Erklärung in §. 264.

2) Sind g und h die Maaßzahlen der Grundlinie und Höhe eines Rechtecks, so ist die Zahl für den Inhalt desselben

$$= g \cdot h.$$

Dieser Ausdruck hat zwei Dimensionen, und dasselbe gilt für die Inhalte aller anderen Figuren, da dieselben sämmtlich durch Zurückführung auf ein Rechteck (§. 219 und 221) erhalten sind.

Bemerkung. In der Stereometrie wird bewiesen, daß der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedum, dessen Länge, Breite und Höhe die Maaßzahlen a, b, c haben, gleich dem Producte $a \cdot b \cdot c$ ist, welches drei Dimensionen hat; und dasselbe gilt auch für den Inhalt eines jeden andern Körpers, da man sich immer ein Parallelepipedum denken kann, welches mit dem gegebenen Körper gleichen Inhalt hat.

*§. 268. Erklärung.

Bezeichnen, wie auch früher, a, b, c, d ... die Maaßzahlen von Linien, und stellt x irgend einen aus diesen Buchstaben zusammengesetzten algebraischen Ausdruck vor, so wird man die Linie, deren Maaßzahl x ist, wenn im besondern Falle für die Buchstaben a, b, c ... bestimmte Zahlen gegeben sind, dadurch erhalten können, daß man den Zahlenwerth von x berechnet und dann die Einheit so oft auf eine Linie aufträgt, als dieser Werth anzeigt. — Es tritt aber auch häufig der Fall ein, daß nicht sowohl die Werthe von a, b, c ... in bestimmten Zahlen, sondern die Linien selbst, deren Maaßzahlen jene Buchstaben vorstellen, gegeben sind, und verlangt wird, mit Hilfe dieser Linien durch geometrische Construction eine Linie darzustellen, deren Maaßzahl dem Ausdrucke x in allen Fällen gleich ist, welches auch immer die Einheit und die besonderen Zahlenwerthe der Buchstaben a, b, c ... sein mögen. Man sagt dann: der Ausdruck x solle geometrisch construirt werden.

*§. 269. Aufgabe.

Die folgenden Ausdrücke geometrisch zu construiren:

1) $x = a + b$, 2) $x = a - b$,

3) $x = \frac{a \cdot b}{c}$, 4) $x = \frac{a^2}{c}$,

5) $x = \sqrt{a \cdot b}$, 6) $x = a\sqrt{m}$,

7) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, 8) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$,

wo in (6) m nicht die Maaßzahl einer Linie, sondern überhaupt irgend eine absolute Zahl und also ohne Dimension sein soll.

Aufl. Die Constructionen von (1) und (2) sind an sich klar.

Die Gleichung (3) liefert folgende Proportion:

$$c : b = a : x;$$

hiernach ist x die vierte Proportionale zu a, b, c *) und kann daher nach §. 201 leicht construirt werden.

Die Gleichung (4) ist ein besonderer Fall von (3), der entsteht, wenn man b = a setzt.

Die Gleichung (5) läßt folgende Umformungen zu:

$$x^2 = a.b \text{ oder } a:x = x:b.$$

Demnach wird x erhalten, wenn man nach §. 202 die mittlere Proportionale zu a und b sucht.

Aus der Gleichung (6) folgt

$$x^2 = ma^2 = ma.a.$$

Man findet daher x nach (5) als mittlere Proportionale zu ma und a.

In der Gleichung (7), die sich auch so schreiben läßt:

$$x^2 = a^2+b^2,$$

ist x die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Catheten a und b.

In der Gleichung (8) oder

$$x^2 = a^2-b^2$$

ist von einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse a und eine Cathete b gegeben, die andere gesucht. Diese wird erhalten, wenn man den einen Schenkel eines rechten Winkels = b macht und aus dem Endpunkte einen Kreis mit a beschreibt, der vom andern Schenkel x abschneidet. — Oder man beschreibt über a einen Halbkreis und legt b als Sehne hinein. Die Verbindungslinie der Endpunkte von a und b ist x.

*§. 270. Zusatz.

Außer den im vorhergehenden §. angeführten Ausdrücken sind auch noch die, (aber keine anderen,) welche aus jenen zusammengesetzt oder auf dieselben zurückführbar sind, einer geometrischen Construction fähig; so folgende Beispiele:

$$9) \quad x = \frac{abc}{df}.$$

Man suche zuerst eine Linie $z = \frac{ab}{d}$ und dann $x = \frac{zc}{f} \left(= \frac{abc}{df}\right)$, beides nach (3) im vorhergehenden §.

$$10) \quad x = \sqrt{a^2+b^2-c^2}.$$

Bestimmt man erst eine Linie z aus der Gleichung

$$z^2 = a^2+b^2,$$

so ist

$$x = \sqrt{z^2-c^2}.$$

$$11) \quad x = \sqrt{a^2+ab}.$$

Man suche eine Linie z aus der Gleichung

$$z^2 = ab;$$

dann ist

$$x = \sqrt{a^2+z^2}.$$

Oder, was viel bequemer ist, da sich die Gleichung (11) auch so umformen läßt:

$$x = \sqrt{a(a+b)},$$

man suche die mittlere Proportionale zu a und a+b.

$$12) \quad x = \sqrt{ab+cd}.$$

*) Auch hier wird der Kürze wegen, wie schon in der Bemerkung zu §. 218 angegeben worden, die Linie, deren Maaßzahl x ist, die Linie x genannt.

Sucht man zuerst zwei Linien u und v aus den Gleichungen

$$u^2 = ab \text{ und } v^2 = cd,$$

so ist $$x = \sqrt{u^2+v^2}.$$

Oder man setze $$x = \sqrt{a\left(b+\frac{cd}{a}\right)}$$

und bestimme erst eine Linie $$z = \frac{cd}{a}$$

und dann $$x = \sqrt{a(b+z)}.$$

Bemerkung. Durch die letzten §§. wird man in vielen Fällen in den Stand gesetzt, geometrische Aufgaben auf die Art zu lösen, daß man für die Maaßzahlen der gegebenen Linien irgend Buchstaben setzt, aus diesen die Maaßzahlen der gesuchten Linien, von deren Kenntniß die Auflösung der Aufgabe abhängt, berechnet und diese Ausdrücke dann nach dem Vorhergehenden construirt. Beispiele liefern die nächsten §§.

*§. 271. Aufgabe.

Ein Rechteck in ein anderes mit einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Aufl. Das gegebene Rechteck habe die Seiten a und b, die gegebene Seite des neuen Rechtecks heiße c, die gesuchte x. Dann hat man zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$cx = ab,$$

also $$x = \frac{ab}{c} \text{ oder } c : b = a : x.$$

Construction. Das gegebene Rechteck sei DEFG (Fig. 173); man mache DH = c, ziehe HL (= a) parallel zu DG und ziehe DL bis zum Einschnitte in die verlängerte EF, so ist EN = x; denn es verhält sich offenbar $$c : b = a : EN.$$
Zieht man nun noch NM || ED und verlängert DG und HL bis zum Einschnitte in diese Parallele, so ist DHOM das verlangte Rechteck.

Beweis. Die durch Rechnung aufgefundene Construction läßt sich leicht rein geometrisch nachweisen. Es ist nehmlich nach §. 168 Rechteck ML = LE, also auch ML + GH = LE + GH, d. h. MH = GE.

Anm. Eines solchen geometrischen Beweises bedarf es nun zwar eigentlich nicht, wenn man richtig gerechnet und nach Anleitung der §§. 269 und 270 construirt hat. Andererseits aber gewährt diese Ableitung und Vergleichung des arithmetischen und geometrischen Verfahrens dem Anfänger eine eben so nützliche, als anziehende Uebung.

*§. 272. Aufgabe.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches fünfmal so groß ist, als ein gegebenes Quadrat.

Aufl. Hat das gegebene Quadrat die Seite a, das gesuchte die Seite x, so soll sein $$x^2 = 5a^2.$$
Diese Gleichung läßt sich so schreiben:

$$1)\quad x^2 = 5a \cdot a,$$

und dann wird x als mittlere Proportionale zu a und 5a erhalten. — Man kann aber der Gleichung (1) auch die Form

$$2)\quad x^2 = (2a)^2 + a^2$$

geben, und dann ist x die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, welches die Catheten a und 2a hat.

Endlich kann man auch setzen

$$3)\quad x^2 = 9a^2 - 4a^2 = (3a)^2 - (2a)^2,$$

wonach sich x als Cathete eines rechtwinkligen Dreiecks ergiebt, in welchem die andere Cathete $= 2a$ und die Hypotenuse $= 3a$ ist.

*§. 273. Aufgabe.

Eine gegebene Linie in stetiger Proportion zu theilen.

Aufl. Die gegebene Linie sei a, der größere Abschnitt x, also der kleinere $a - x$; dann ist die Bedingungsgleichung

$$a : x = x : a - x$$

oder

$$x^2 = a^2 - ax$$

oder

$$x^2 + ax = a^2.$$

Hieraus folgt auf bekannte Weise (vergl. Thl. 1. §. 190)

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2} = \frac{a(-1 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

Weil aber x als Maaßzahl einer Linie eine absolute Zahl sein muß, so kann vor der Wurzel nur das Zeichen (+) gelten.

Construction. Man errichte im Endpunkte B der Linie CB = A (Fig. 160) ein Loth $BE = \tfrac{1}{2}a$ und ziehe CE $(= \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2})$, schneide dann EB von EC = EF ab, so ist CF = x. Wenn man daher CD = CF macht, so ist D der gesuchte Theilungspunkt.

Anm. Die hier angegebene Construction stimmt ganz mit der in §. 238 aufgestellten überein, wo man auch den geometrischen Beweis derselben nachzusehen hat. Durch die Rechnung wird aber jene Construction in ein viel klareres Licht gestellt, indem man hier sogleich die Gründe der einzelnen Schritte des Verfahrens, und wie dieselben dem Ziele entgegenführen, klar und deutlich einsieht, was weit weniger von der rein geometrischen Behandlung gilt.

*§. 274. Aufgabe.

Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, dessen Umfang = p gegeben ist.

Aufl. Bezeichnen wir die Hypotenuse mit y und die gleichen Catheten mit x, so ist

$$1)\quad y + 2x = p$$

und nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$2)\quad y^2 = 2x^2.$$

Aus (1) folgt $y = p - 2x$; dieser Werth, in die zweite Gleichung eingesetzt, verwandelt dieselbe in

$$p^2 - 4px + 4x^2 = 2x^2$$

oder

$$2x^2 - 4px = -p^2$$

oder

$$x^2 - 2px = \frac{-p^2}{2},$$

folglich

$$x = p - \sqrt{\frac{p^2}{2}} = p - \sqrt{\frac{2p^2}{4}} = p\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)$$

und

$$y = p - 2x = -p + \sqrt{2p^2} = p(-1 + \sqrt{2}).$$

Da nehmlich die Werthe von x und y offenbar $> o$, aber $< p$ sein müssen, so kann in dem Werthe von x nur das Zeichen (—) und in dem Werthe von y das Zeichen (+) vor dem Wurzelausdrucke gelten.

Construction. Benutzen wir hierzu den Werth von $y = -p + \sqrt{2p^2}$, so ergiebt sich uns folgendes Verfahren: — Man zeichne einen rechten Winkel BAC (Fig. 174), schneide von beiden Schenkeln $p = AB = AC$ ab, ziehe BC ($= \sqrt{2p^2}$) und beschreibe mit $AC = p$ um C einen Kreis, welcher BC in D schneidet, so ist $BD = -p + \sqrt{2p^2} = y$, und wenn man DE $\parallel$ AC zieht, BDE das verlangte Dreieck.

Beweis. Das Dreieck BED ist zunächst rechtwinklig und gleichschenklig, weil es dem Dreiecke BAC ähnlich ist, und es hat auch den verlangten Umfang p. Denn wenn wir DF $\perp$ BC ziehen, so ist Winkel $EDF = 45^0$, folglich $DE = EF$ und $DF = BD$, und da nach §. 130 $DF = AF$ ist, $BE + DE + BD = BE + EF + AF = p$, w. z. e. w.

*§. 275. Aufgabe.

Ein Rechteck zu zeichnen, von welchem der Umfang $= p$ und der Inhalt $= a^2$ gegeben ist.

Aufl. Sind x und y die Seiten des gesuchten Rechtecks, so soll sein:

$$1)\quad 2x + 2y = p$$

und

$$2)\quad xy = a^2.$$

Aus (1) folgt

$$3)\quad x = \tfrac{1}{2}p - y.$$

Dieß in (2) eingesetzt, giebt:

$$\tfrac{1}{2}py - y^2 = a^2,$$

oder

$$y^2 - \tfrac{1}{2}py = -a^2.$$

Daraus folgt auf bekannte Weise

$$y = \tfrac{1}{4}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{16}p^2 - a^2}$$

und hieraus und aus (3)

$$x = \tfrac{1}{4}p \mp \sqrt{\tfrac{1}{16}p^2 = a^2}.$$

Obgleich für x und y zwei Werthe gefunden sind, so sieht man doch leicht, daß die Aufgabe nur eine Auflösung hat, da die Werthe von x und y sich vertauschen lassen. Soll also x die größere, y die kleinere Seite sein, so wird man zu setzen haben:

$$x = \tfrac{1}{4}p + \sqrt{\tfrac{1}{16}p^2 - a^2}$$

und

$$y = \tfrac{1}{4}p - \sqrt{\tfrac{1}{16}p^2 - a^2}.$$

Determination. Da die Werthe von x und y absolute Zahlen und also jedenfalls reell sein müssen, so muß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv oder Null, also jedenfalls

$$a^2 \leqq \tfrac{1}{16}p^2,\ \text{d. h.}\ a \leqq \tfrac{1}{4}p$$

sein. Der größte Werth, welchen hiernach a haben darf, wenn ein Rechteck von dem vorgeschriebenen Umfange möglich sein soll, ist also $\tfrac{1}{4}p$. Für diesen Werth ($a = \tfrac{1}{4}p$) wird $x = \tfrac{1}{4}p = y$, und das gesuchte Rechteck ist folglich in diesem Falle ein Quadrat. Hieraus ergiebt sich, daß von allen Rechtecken mit gleichem Umfange das Quadrat den größten Inhalt hat. (Vergl. §. 249.)

Constr. Man bilde ein rechtwinkliges $\triangle$ CDE (Fig. 175) mit der Cathete $CD = a$ und der Hypotenuse $CE = \tfrac{1}{4}p$ und beschreibe aus E mit CE einen Kreis, der die beiderseits verlängerte DE in F und G schneidet, so ist $FD = y$ und $DG = x$. Wenn man nun noch CD um $DH = DF$ verlängert und HK $\parallel$ DG, GK $\parallel$ DH zieht, so ist DHKG das verlangte Rechteck.

Beweis. Denn nach der Construction ist $DH + DG = FG = \tfrac{1}{2}p$, folglich der ganze Umfang $= p$. Das Rechteck hat aber auch den verlangten Inhalt. Denn es ist bekanntlich

$$FD : DC = DC : DG,$$
d. h. $$y : a = a : x,$$
also $$xy = a^2.$$

*§. 276. Aufgabe.

In einen Kreis ein Rechteck zu zeichnen, welches einen vorgeschriebenen Umfang hat.

Aufl. Bezeichnet man den Umfang des Rechtecks mit 2a, den Radius des Kreises mit r, so hat man zur Bestimmung der Seiten x und y des Rechtecks die Gleichungen:

$$1)\quad x + y = a,$$

und weil der Durchmesser mit den Seiten des Rechtecks ein rechtwinkliges Dreieck bildet: $$2)\quad x^2 + y^2 = 4r^2.$$
Aus (1) folgt $$3)\quad x = a - y.$$
Dieß in (2) eingesetzt giebt:

$$(a-y)^2 + y^2 = 4r^2$$
oder $$a^2 - 2ay + 2y^2 = 4r^2$$
oder $$y^2 - ay = 2r^2 - \tfrac{1}{2}a^2,$$
woraus weiter folgt: $$y = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{2r^2 - \tfrac{1}{4}a^2},$$
und vermöge der Gleichung (3) $$x = \tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{2r^2 - \tfrac{1}{4}a^2}.$$
Auch dießmal lassen sich die Werthe von x und y vertauschen, und die Aufgabe hat also nur eine Auflösung. Ist daher x die größere, y die kleinere Seite, so hat man: $$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{2r^2 - \tfrac{1}{4}a^2}$$
und $$y = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{2r^2 - \tfrac{1}{4}a^2}.$$

Determination. Soll die Aufgabe möglich sein, so müssen vor allen Dingen x und y reell sein, d. h. es muß

$$1)\quad \tfrac{1}{4}a^2 \leqq 2r^2 \text{ oder } \tfrac{1}{2}a \leqq r\sqrt{2}$$

sein. Nimmt man gerade $\frac{1}{2}a = r\sqrt{2}$ an, so wird $x = \frac{1}{2}a = y$, und das zu zeichnende Rechteck ist also ein Quadrat. Demnach hat unter allen in denselben Kreis zu zeichnenden Rechtecken das Quadrat den größten Umfang. — Es reicht aber nicht aus, daß x und y reell sind; sie müssen auch beide > 0 und $< 2r$ sein. Das Erste versteht sich für x von selbst, für y ist in dieser Hinsicht erforderlich, daß

$$\tfrac{1}{2}a > \sqrt{2r^2 - \tfrac{1}{4}a^2},$$
oder $$\tfrac{1}{4}a^2 > 2r^2 - \tfrac{1}{4}a^2,$$
also $$\tfrac{1}{2}a^2 > 2r^2$$
oder $$2)\quad a > 2r$$
ist, was auch anderweitig leicht erhellt. — Ferner sollen x und y $< 2r$ sein. Gilt dieß von x, so wird es um so mehr auch für y gelten, und jenes ist der Fall, wenn man hat $$2r > \tfrac{1}{2}a + \sqrt{2r^2 - \tfrac{1}{4}a^2},$$
oder $$2r - \tfrac{1}{2}a > \sqrt{2r^2 - \tfrac{1}{4}a^2},$$
folglich, da nach (1) $\frac{1}{2}a$ höchstens $= r\sqrt{2}$, also jedenfalls $\frac{1}{2}a < 2r$ ist,
$$4r^2 - 2ar + \tfrac{1}{4}a^2 > 2r^2 - \tfrac{1}{4}a^2$$
oder $$2r^2 - 2ar + \tfrac{1}{2}a^2 > 0,$$
also auch $$a^2 - ar + \tfrac{1}{4}a^2 > 0,$$
d. h. $$(r - \tfrac{1}{2}a)^2 > 0,$$

was jedenfalls stattfindet, wie auch immer a und r angenommen sein mögen, so lange nur nicht gerade $r = \frac{1}{2}a$ ist. Demnach hängt die Möglichkeit der Aufgabe von den zwei Bedingungen ab:

$$1)\ \frac{1}{2}a \leqq r\sqrt{2} \text{ und } 2)\ \frac{1}{2}a > r.$$

Constr. Um einen der beiden obigen Ausdrücke, z. B. x, zu construiren, hat man zunächst eine Linie u aus der Gleichung $u^2 = 2r^2 = r^2 + r^2$ und dann $v = \sqrt{u^2 - \frac{1}{4}a^2}$ zu suchen. Hierzu gelangt man so: Man zeichne zwei sich senkrecht schneidende Radien AC und BC (Fig. 176), ziehe AB ($= \sqrt{2r^2}$), beschreibe um AB einen Halbkreis, lege in diesen $\frac{1}{2}a = AD$ als Sehne ein und ziehe DB ($= \sqrt{u^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{2r^2 - \frac{1}{4}a^2}$). Verlängert man nun AD bis zur Peripherie des gegebenen Kreises, so ist die Verlängerung DE = DB, — (denn wenn man BE zieht, so ist Winkel BED $= 45^0$, weil er als Peripheriewinkel auf dem Quadranten AB steht; da nun Winkel BDE $= 90^0$ ist, so ist auch Winkel DBE $= 45^0$, daher DE = DB). — Demnach ist AE = x, und wenn man noch EF, FG $\parallel$ AE und AG zieht, so ist AEFG das verlangte Rechteck.

Beweis. Um zu zeigen, daß dieses Rechteck den vorgeschriebenen Umfang 2a hat, beschreibe man aus B mit AB einen Kreis, der die verlängerte AE in H schneidet. Dann ist Winkel EHF $= 45^0$, weil der zugehörige Bogen AF $= 90^0$ (= Winkel ABF) ist; folglich ist EF = EH und AE + EF = AH; nun ist aber die Sehne AH durch das Loth BD halbirt, also DH = AD $= \frac{1}{2}a$ und AH = a, daher auch AE + EF = a, folglich der ganze Umfang = 2a.

*§. 277. Aufgabe.

In ein Dreieck ein Rechteck so zu zeichnen, daß zwei Ecken in die Grundlinie, die beiden anderen in die Seiten des Dreiecks fallen, und das Rechteck einem gegebenen Rechtecke gleich wird.

Aufl. Die Höhe des Dreiecks sei h, die Grundlinie g; man verwandle — was für das Folgende Bequemlichkeit gewährt — nach §. 271 das gegebene Rechteck in ein solches, das mit dem Dreieck einerlei Grundlinie g hat, und nenne die Höhe dieses Rechtecks c, so findet man, wenn man sich das gesuchte Rechteck bereits in das Dreieck gezeichnet denkt (Fig. 177) und seine Seiten mit x und y bezeichnet, die Bestimmungsgleichungen:

$$LM : BC = AG : AK$$

oder $$1)\quad y : g = h - x : h$$

und $$2)\quad xy = cg.$$

Aus (1) ist $hy = gh - gx$, also $y = \frac{gh - gx}{h}$.

Durch Substitution dieses Werthes von y verwandelt sich (2) in

$$\frac{ghx - gx^2}{h} = cg,$$

oder $$ghx - gx^2 = cgh$$

oder $$x^2 - hx = -ch.$$

Hieraus folgt $$x = \frac{1}{2}h \pm \sqrt{\frac{1}{4}h^2 - ch}$$

$$= \frac{1}{2}h \pm \sqrt{h(\frac{1}{4}h - c)}$$

und $$y = \frac{g(h-x)}{h} = \frac{g}{h}[\frac{1}{2}h \mp \sqrt{h(\frac{1}{4}h - c)}].$$

Man erhält hiernach für y und x zwei Paar verschiedener Werthe, und die Aufgabe läßt folglich eine doppelte Auflösung zu.

Determination. Soll die Aufgabe zu lösen sein, so muß

$$c \leqq {}^1/_4 h$$

sein. Nimmt man $c = {}^1/_4 h$ an, so fallen die beiden Werthe von x zusammen in $x = {}^1/_2 h$ und die beiden Werthe von y desgleichen in $y = {}^1/_2 g$. Dieses größte Rechteck, welches halb so groß ist, als das Dreieck, wird erhalten, wenn man die beiden Seiten des Dreiecks halbirt, die Halbirungspunkte verbindet und durch dieselben Parallelen mit der Höhe zieht. Ist aber $c < {}^1/_4 h$, so bekommen x und y doppelte reelle und positive Werthe, die beziehlich kleiner sind, als h und g, und die Aufgabe läßt also dann jedenfalls zwei verschiedene Auflösungen zu.

Constr. Die beiden Werthe von x lassen sich so umformen:

$$x = {}^1/_2 h \pm \sqrt{{}^1/_2 h({}^1/_2 h - 2c)}.$$

Um diesen Ausdruck zu construiren, hat man zunächst die mittlere Proportionale zwischen ${}^1/_2 h$ und ${}^1/_2 h - c$ zu suchen. Zu dieser gelangt man so: Man halbire $AK = h$ in D, beschreibe über AD einen Halbkreis, mache $AE = 2c$, errichte in E das Loth EF und ziehe DF $[= \sqrt{{}^1/_2 h({}^1/_2 h - 2c)}]$. Beschreibt man dann weiter, um x zu erhalten, aus D mit DF einen Kreis, der AK in G und H schneidet, so ist der größere Werth von x durch KG, der kleinere durch KH dargestellt, wonach sich die fernere Construction der gesuchten Rechtecke LMON und PQSR von selbst ergiebt.

Beweis. Das Verhältniß des Rechtecks LMON zu dem gegebenen Rechtecke wird ausgedrückt durch

$$\frac{GK \,.\, LM}{c \,.\, g};$$

für diesen Ausdruck kann man, da $LM : g = AG : h$ ist, auch

$$\frac{GK \,.\, AG}{c \,.\, h}$$

setzen, oder da $AD = DK$, $DG = DH$, also auch $AG = KH$ und $AH = GK$ ist:

$$\frac{AH \,.\, AG}{c \,.\, h}.$$

Zieht man AF, so ist Winkel $AFD = 90^0$, folglich berührt AF den Kreis GFH, und es verhält sich nach §. 143, 3

$$AG : AF = AF : AH,$$

woraus

$$AG \,.\, AH = AF^2$$

hervorgeht. Weiter ist aber auch im rechtwinkligen $\triangle$ AFD

$$AF^2 = AD \,.\, AE.$$

Demnach verwandelt sich das obige Verhältniß in

$$\frac{AD \,.\, AE}{c \,.\, h} = \frac{{}^1/_2 h \,.\, 2c}{c \,.\, h} = \frac{c \,.\, h}{c \,.\, h},$$

d. h. das Rechteck LMON ist dem gegebenen Rechtecke gleich.

Eben so ist Rechteck

$$\frac{PQSR}{c \,.\, g} = \frac{HK \,.\, PQ}{c \,.\, g} = \frac{HK \,.\, AH}{c \,.\, h} = \frac{AG \,.\, AH}{c \,.\, h},$$

woraus, wie man so eben gesehen hat, Rechteck $PQSR = c \,.\, g$ folgt.

*§. 278. Zusatz.

Von der vorhergehenden Aufgabe ist die folgende nicht wesentlich verschieden: In ein Dreieck ABC (Fig. 178) ein Parallelogramm BDEF so zu zeichnen, daß zwei Seiten desselben BD und BF in zwei Seiten des Dreiecks AB und BC fallen, und die gegenüberstehende Ecke E in die dritte Seite AC fällt. — Man wird nehmlich den gegebenen Inhalt zunächst durch ein Parallelogramm GC ausdrücken, welches den Winkel B und eine Seite BC mit dem Dreieck gemeinschaftlich hat. Setzt man dann der Kürze wegen AB = h, BC = g, BG = c, BD = x, BF = y, so hat man zur Bestimmung von x und y die Gleichungen:

$$1)\quad y : g = h - x : h$$

und

$$2)\quad x \cdot y = c \cdot g,$$

indem bei gleichen Parallelogrammen mit einem gemeinschaftlichen Winkel die Producte der einschließenden Seiten nach §. 212, b gleich sind. Da diese Gleichungen mit denen des vorhergehenden §. identisch sind, so ist auch der weitere Gang der Auflösung im Wesentlichen derselbe.

*§. 279. Aufgabe.

Ein Quadrat in ein gleichseitiges Dreieck zu verwandeln.

Aufl. Die Seite des gegebenen Quadrats ABCD (Fig. 179) sei a, die Seite des gesuchten Dreiecks KFH sei x, die Höhe y, so ist

$$1)\quad \tfrac{1}{2}xy = a^2$$

und im rechtwinkligen Dreieck FBH

$$2)\quad y^2 + \tfrac{1}{4}x^2 = x^2 \text{ oder } y^2 = \tfrac{3}{4}x^2.$$

Aus (1) folgt $\quad 3)\quad x = \frac{2a^2}{y};$

dieß in (2) eingesetzt, giebt $\quad y^2 = \frac{3a^4}{y^2}$ oder $y^4 = 3a^4,$

also $\quad y = a\sqrt[4]{3}$

und aus (3) $\quad x = \frac{2a}{\sqrt[4]{3}}$

oder wenn man im Zähler und Nenner mit $\sqrt[4]{27}$ multiplicirt,

$$x = \tfrac{2}{3}a\sqrt[4]{27}.$$

Constr. Zur Zeichnung ist der Werth von y am bequemsten; aus der obigen Gleichung $\quad y^4 = 3a^4 = 3a^2 \cdot a^2$

hat man nehmlich $\quad y^2 = a\sqrt{3a^2}.$

Hiernach ist zuerst eine Linie v aus der Gleichung $v^2 = 3a^2$ und dann y aus der Gleichung $y^2 = a \cdot v$ zu suchen. Daraus ergiebt sich folgendes Verfahren:

Man beschreibe aus C mit 2BC = 2a einen Kreis, der die verlängerte AB in E schneidet, (so ist $BE = \sqrt{3a^2} = v$); man mache ferner BG = BE und beschreibe über GC einen Halbkreis, der AE in F schneidet, (so ist $BF = \sqrt{a \cdot v} = y$); endlich ziehe man FH ∥ EC, mache BK = BH und ziehe FK, so ist KFH das verlangte gleichseitige Dreieck.

Beweis. Daß dasselbe gleichseitig ist, erhellt leicht aus der Construction; denn da FH ∥ EC und BC = ½EC gemacht ist, so ist auch BH

$= \frac{1}{2}FH$, also $KH = FH = FK$. Das Dreieck hat aber auch mit dem Quadrate gleichen Inhalt. Es ist nehmlich

$$1)\quad \triangle\, FBH : EBC = BF^2 : BE^2 = BF^2 : BG^2,$$

oder da

$$BG : BF = BF : BC,$$

also auch

$$BG^2 : BF^2 = BF^2 : BC^2 \text{ ist,}$$

$$2)\quad \triangle\, FBH : EBC = BC^2 : BF^2.$$

Nun ist aber $BC^2 = ABCD$, $BF^2 = BC \,.\, BG = BC \,.\, BE = 2 \triangle EBC$; hiernach verwandelt sich die Gleichung (2) in

$$3)\quad \triangle\, FBH : EBC = ABCD : 2EBC,$$

woraus

$$\triangle\, FBH = \frac{1}{2}ABCD,$$

also

$$\triangle\, FKH = ABCD$$

hervorgeht.

Uebungsaufgaben.

Aufgabe 351. Eine gegebene Linie a um ein gesuchtes Stück x so zu verlängern, daß die Verlängerung mittlere Proportionale wird zwischen der gegebenen und der ganzen verlängerten Linie.

Aufl. $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$.

Aufgabe 352. Eine gegebene Linie a in zwei Theile x und y so zu theilen, daß der Unterschied der Quadrate beider Theile einem gegebenen Quadrate b^2 gleich wird.

Aufl. $x = \frac{a^2+b^2}{2a}$ und $y = \frac{a^2-b^2}{2a}$.

Aufgabe 353. Eine gegebene Linie a in zwei Theile x und y so zu theilen, daß das Rechteck aus beiden Theilen einem gegebenen Quadrate b^2 gleich wird.

Aufl. $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ und $y = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$.

Aufgabe 354. Von einem Rechtecke sind die beiden Seiten a und b gegeben; man soll die größere Seite a in zwei Theile x und y so theilen, daß die Summe der Quadrate der beiden Theile dem gegebenen Rechtecke gleich wird.

Aufl. $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}a^2}$ und $y = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}a^2}$.

Aufgabe 355. Eine gegebene Linie a um ein gesuchtes Stück x so zu verlängern, daß das Rechteck aus der Verlängerung und der ganzen verlängerten Linie einem gegebenen Quadrate b^2 gleich wird.

Aufl. $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$.

Aufgabe 356. Eine gegebene Linie a um ein gesuchtes Stück x so zu verlängern, daß die Summe aus dem Quadrate der Verlängerung und dem Quadrate der ganzen verlängerten Linie mmal so groß wird, als das Quadrat der gegebenen Linie.

Aufl. $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2}ma^2 - \frac{1}{4}a^2} = a\left(\frac{-1+\sqrt{2m-1}}{2}\right)$.

Aufgabe 357. Ein Quadrat zu zeichnen, von welchem der Unterschied zwischen der Diagonale y und der Seite x gleich d gegeben ist.

Aufl. $x = d + \sqrt{2d^2} = d(1+\sqrt{2})$.

Aufgabe 358. Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem die Summe aus der Hypotenuse y und der Cathete x gleich f gegeben ist.

Aufl. $x = -f + \sqrt{2f^2} = f(-1+\sqrt{2})$
$y = 2f - \sqrt{2f^2} = f(2-\sqrt{2})$.

Aufgabe 359. Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem die Hypotenuse $= a$ und die Differenz der Catheten $x - y = d$ gegeben ist.

Aufl. $x = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}d^2}$ und $y = -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}d^2}$.

Aufgabe 360. Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem die eine Cathete $= a$ und die Summe aus der Hypotenuse x und der andern Cathete y gleich f gegeben ist.

Aufl. $x = \frac{f^2+a^2}{2f}$ und $y = \frac{f^2-a^2}{2f}$.

Aufgabe 361. Ueber einer gegebenen Linie a, als Cathete, ein rechtwinkliges Dreieck so zu zeichnen, daß die andere Cathete x mittlere Proportionale zwischen der gegebenen Cathete a und der Hypotenuse y wird.

Aufl. $y = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$.

Aufgabe 362. Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, von welchem die Höhe $= h$ gegeben ist.

Aufl. Die Seite x ist $= \sqrt{\frac{4}{3}h^2} = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$.

Aufgabe 363. Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, von welchem der Unterschied zwischen der Seite x und der Höhe y gleich d gegeben ist.

Aufl. $x = 4d + \sqrt{12d^2} = 2d(2+\sqrt{3})$ und $y = 3d + \sqrt{12d^2} = d(3+2\sqrt{3})$.

Aufgbe 364. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem die Seite $= a$ und die Summe aus der Grundlinie 2x und der Höhe y gleich b gegeben ist.

Aufl. $$x = \frac{2}{5}b \pm \sqrt{\frac{1}{5}a^2 - \frac{1}{25}b^2} = \frac{2b \pm \sqrt{5a^2-b^2}}{5}$$

und $$y = \frac{1}{5}b \mp \sqrt{\frac{4}{5}a^2 - \frac{4}{25}b^2} = \frac{b \mp 2\sqrt{5a^2-b^2}}{5}.$$

Aufgabe 365. In einen Kreis, dessen Durchmesser $= d$ gegeben ist, ein Rechteck zu zeichnen, welches einem gegebenen Quadrate a^2 gleich ist.

Aufl. Ist die größere Seite des gesuchten Rechtecks x, die kleinere y, so ist

$$x = \sqrt{\frac{d^2+\sqrt{d^4-4a^4}}{2}} = \frac{\sqrt{d^2+2a^2}+\sqrt{d^2-2a^2}}{2}$$

und $$y = \sqrt{\frac{d^2-\sqrt{d^4-4a^4}}{2}} = \frac{\sqrt{d^2+2a^2}-\sqrt{d^2-2a^2}}{2}.$$

Aufgabe 366. Ein Trapez durch eine Parallele zu den beiden parallelen Seiten zu halbiren.

Aufl. Sind a und b die beiden parallelen Seiten, h die Höhe des Trapezes und z der Unterschied zwischen der gesuchten Theilungslinie und der kleineren Parallele, endlich x der Abstand dieser beiden Linien von einander, so ist

$$z = -b + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ und } x = \frac{hz}{a-b}.$$

Aufgabe 367. Zwischen den Schenkeln eines Winkels BAC (Fig. 180) ist ein Punkt D gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine die Schenkel schneidende Linie XY so ziehen, daß das abgeschnittene Dreieck XAY einen vorgeschriebenen Inhalt hat.

Aufl. Wenn man durch D mit den Schenkeln des gegebenen Winkels die Parallelen DE und DF zieht, so ist, da der Punkt D gegeben ist, auch AE und AF als bekannt anzusehen. Man setze also der Kürze wegen AE = a und AF = b und verwandle hierauf die Figur, welche den gegebenen Inhalt ausdrückt, in ein Dreieck GHK, in welchem ein Winkel G = A und eine Seite GH = b ist; die andere dem Winkel G anliegende Seite GK sei = c. — Setzen wir nun AX = x und AY = y, so verhält sich, da FD || AX ist: FY : AY = DF : AX

oder 1) $y - b : y = a : x$,

und da △ AXY = GHK sein soll, so ist nach *§. 212

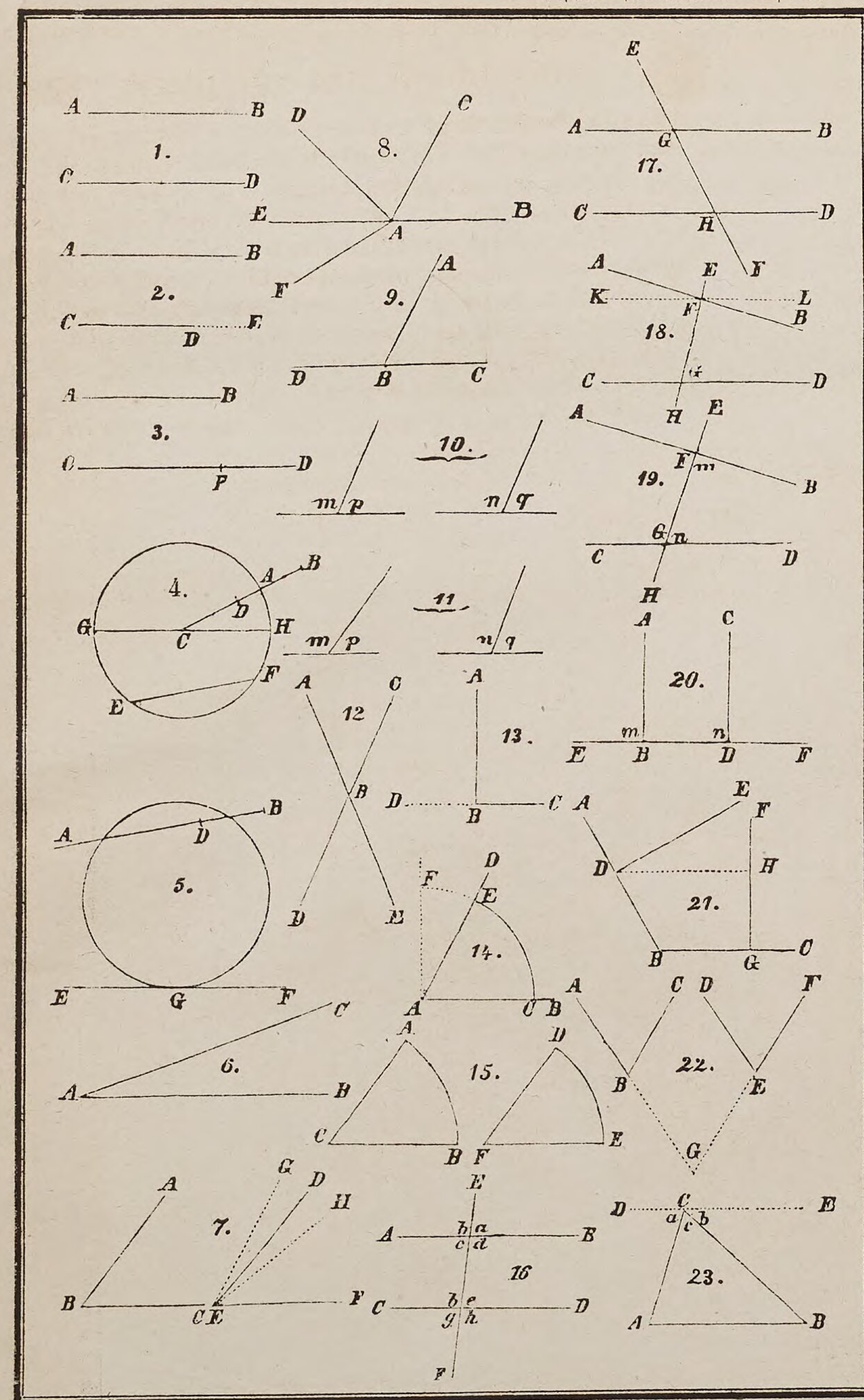
2) $xy = bc$.

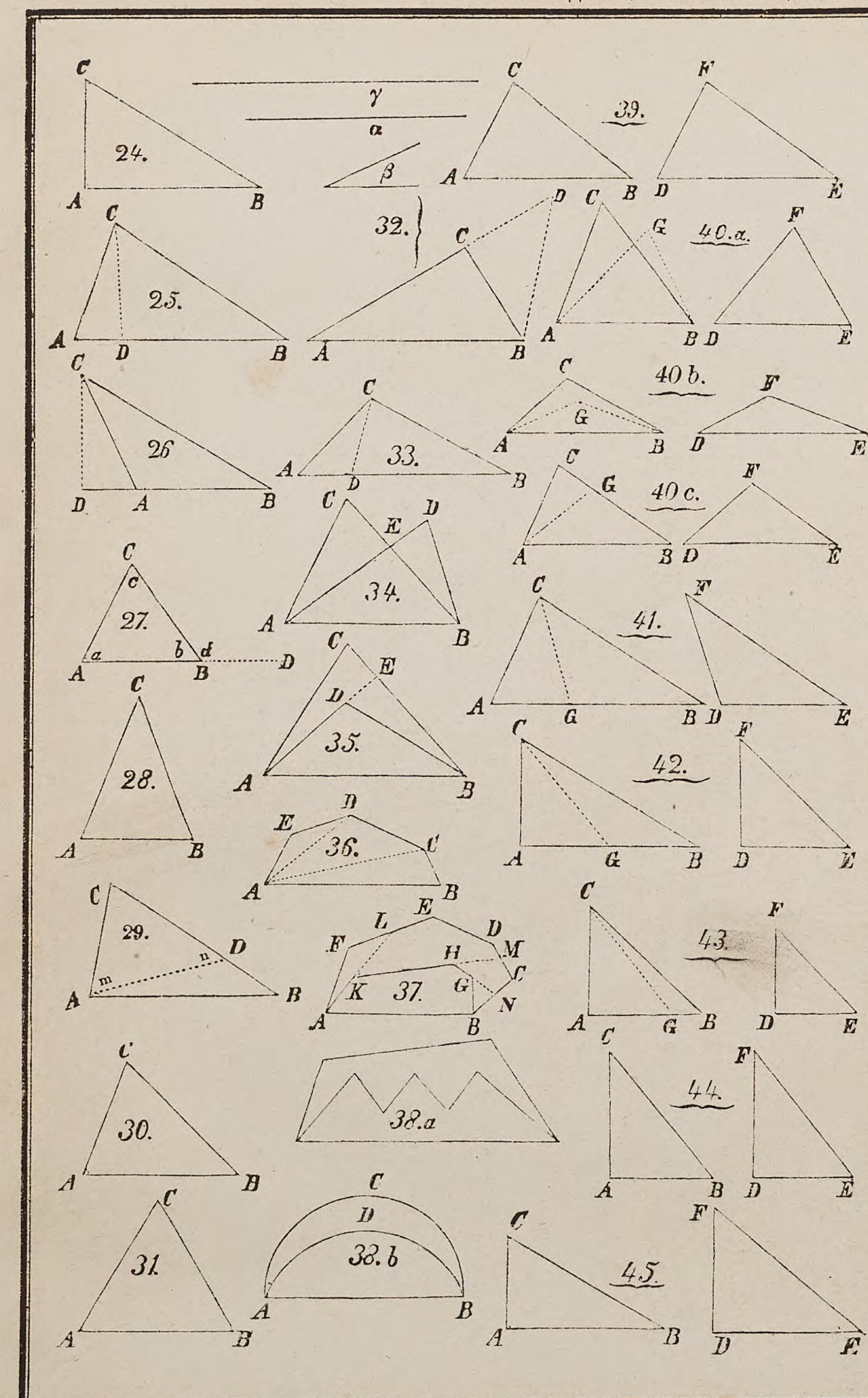
Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

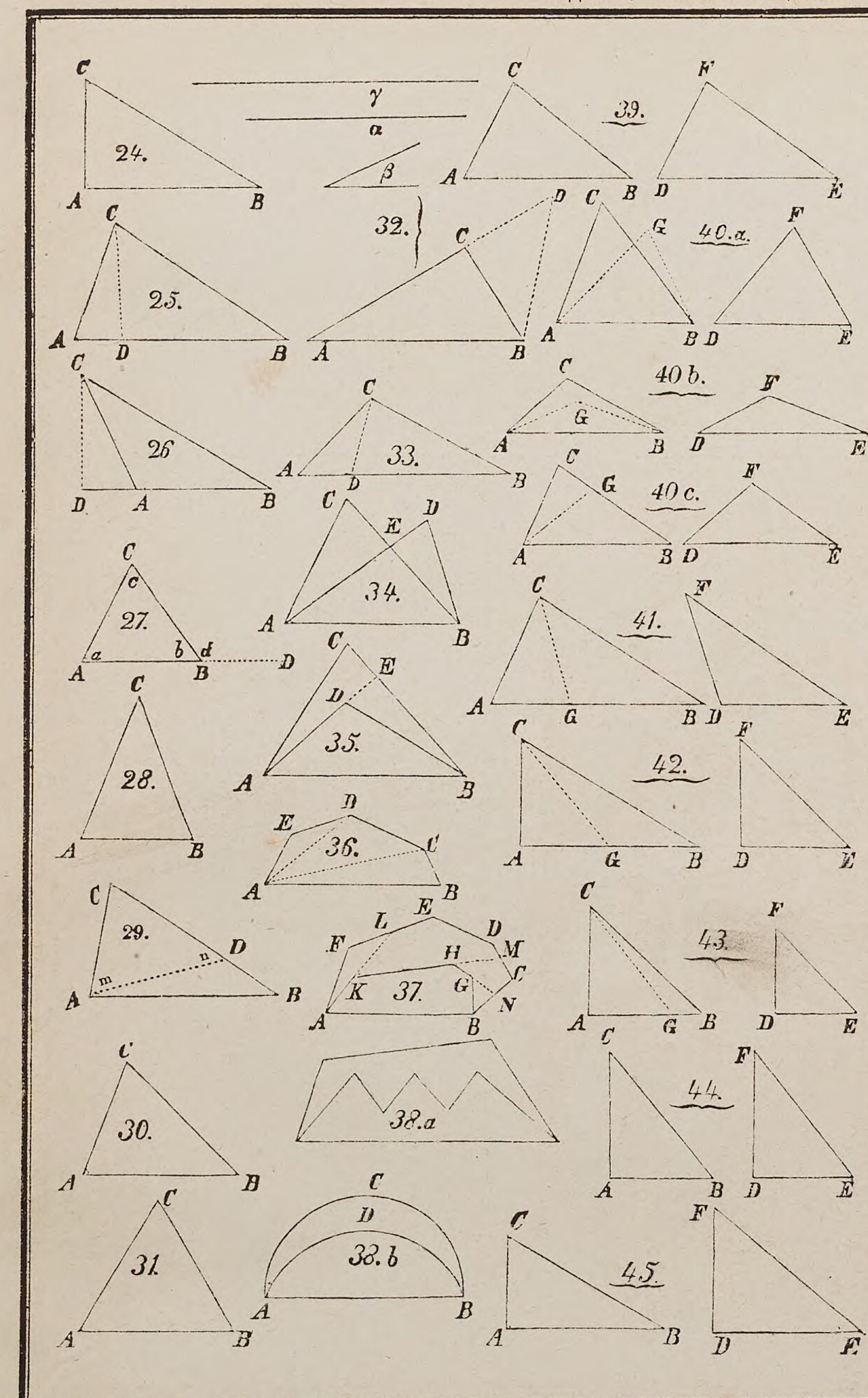
$$x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ac}}{2} \text{ und } y = \frac{b(c \mp \sqrt{c^2 - 4ac})}{2a},$$

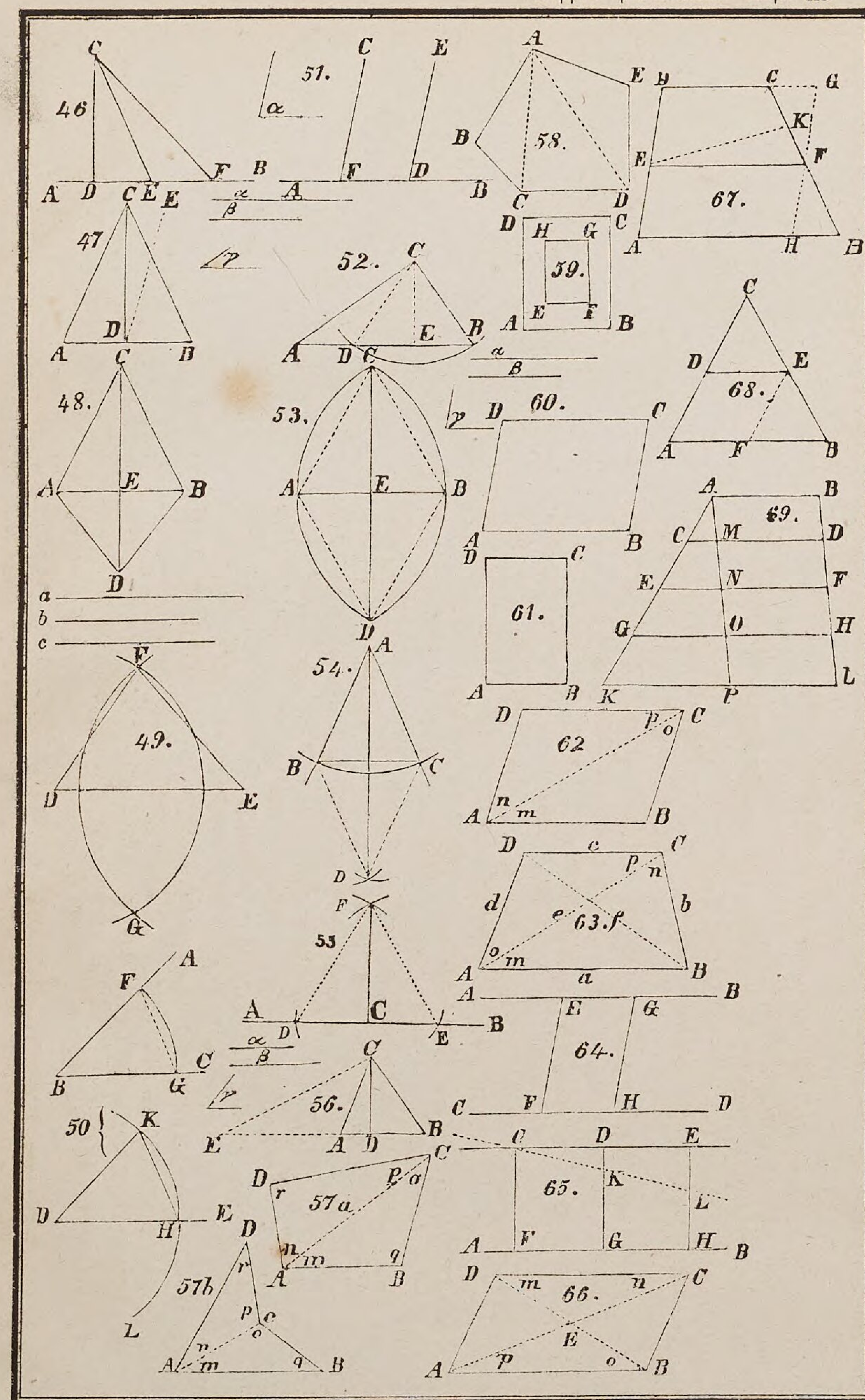
zwei Ausdrücke, welche sich ganz in derselben Art construiren lassen, wie in §. 277 gezeigt ist.

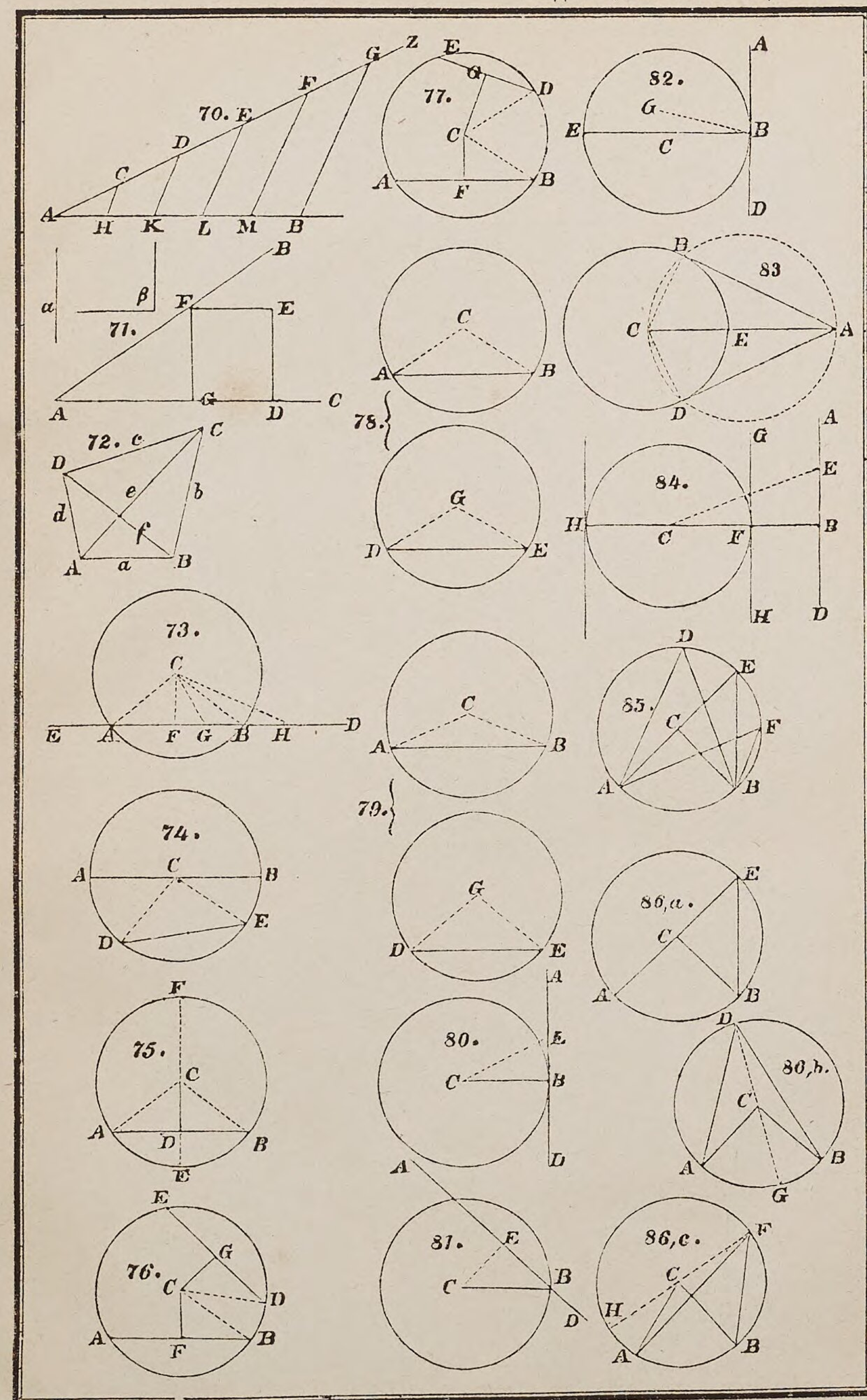
Druck von G. D. Bädeker in Essen.

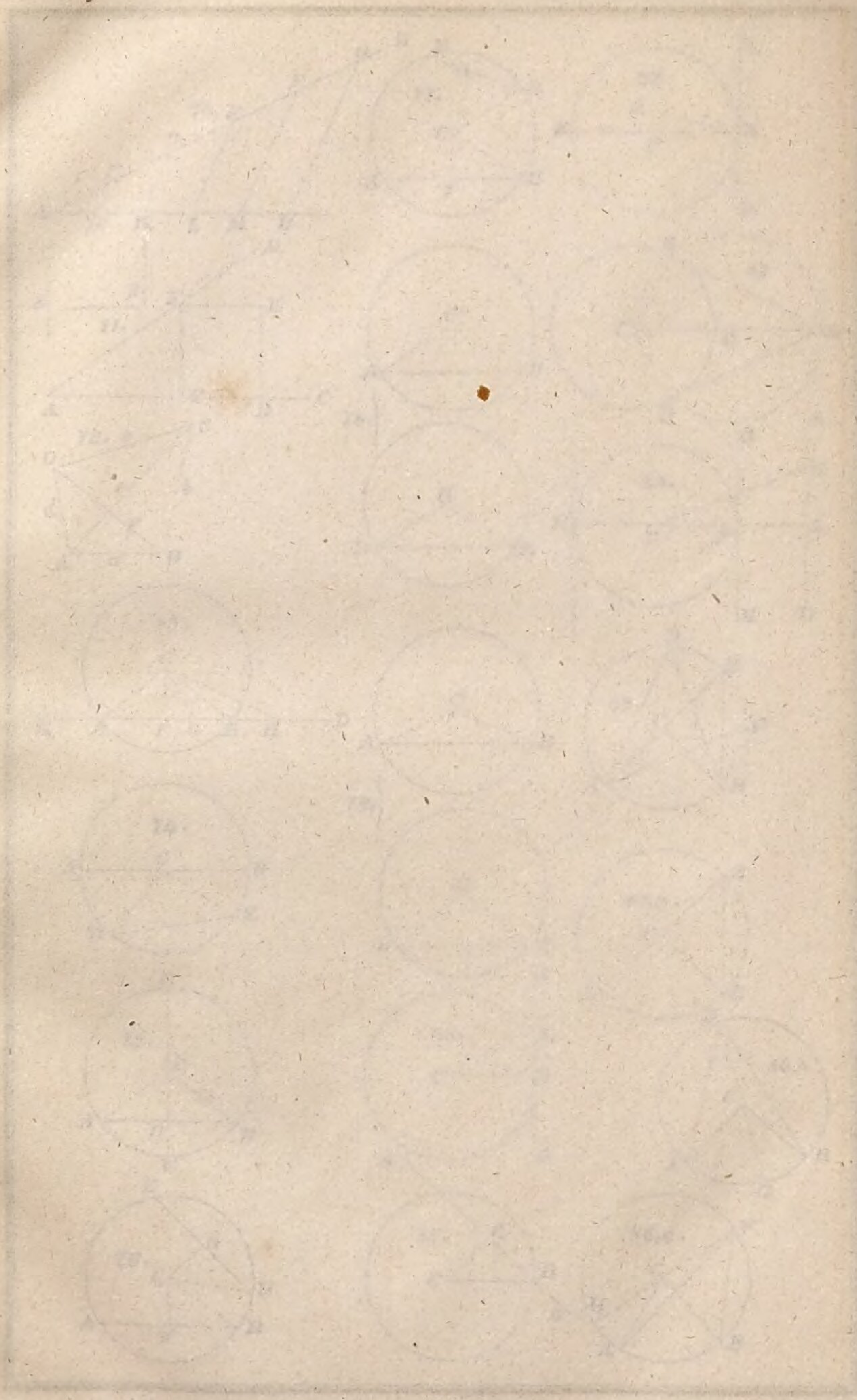

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11
12
13.
14.
15.
16
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.

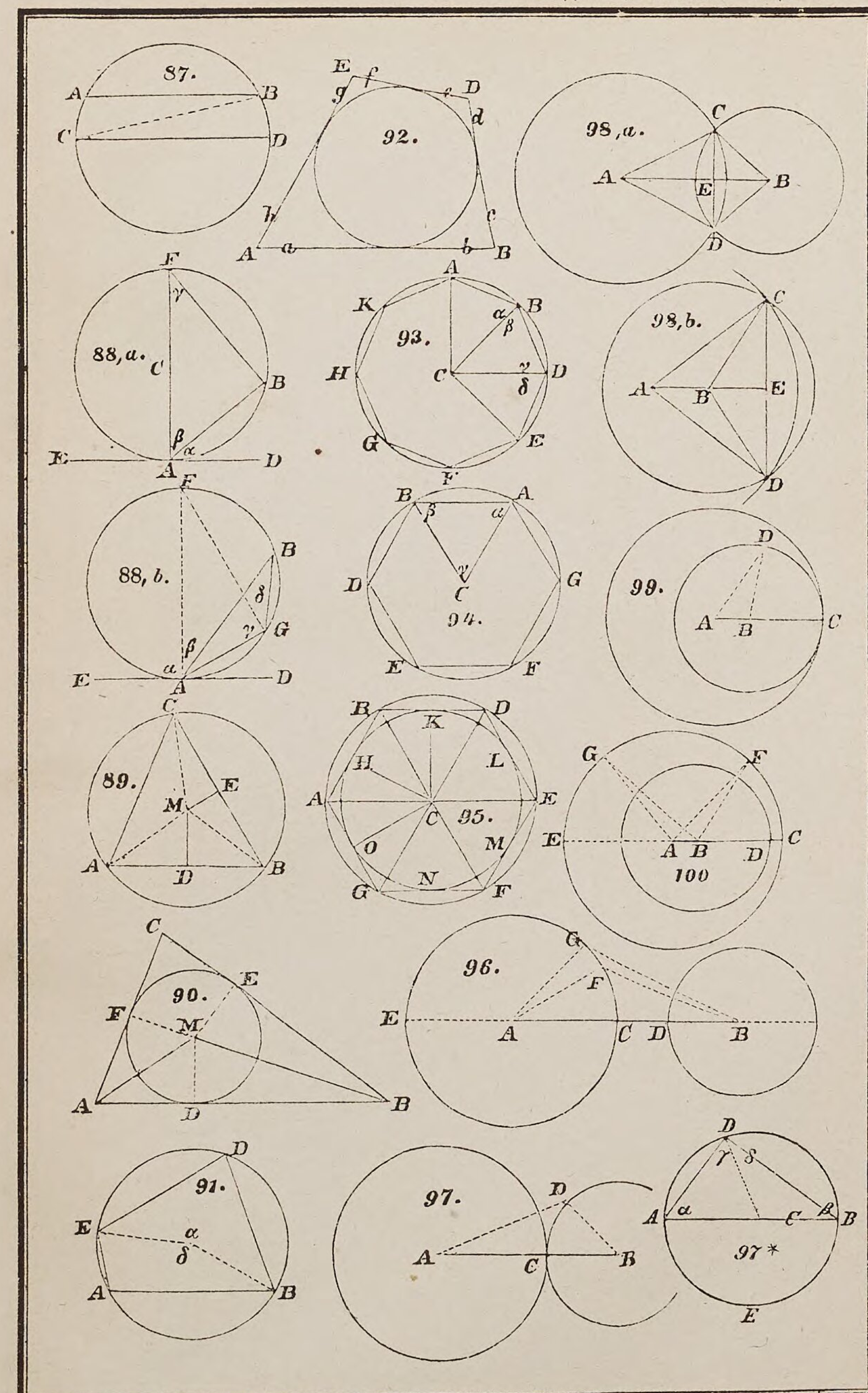

24.
32.
39.
25.
40.a.
26
33.
40 b.
40 c.
27.
34.
41.
28.
35.
42.
36.
29.
37.
43.
30.
38.a
44.
31.
38. b
45.

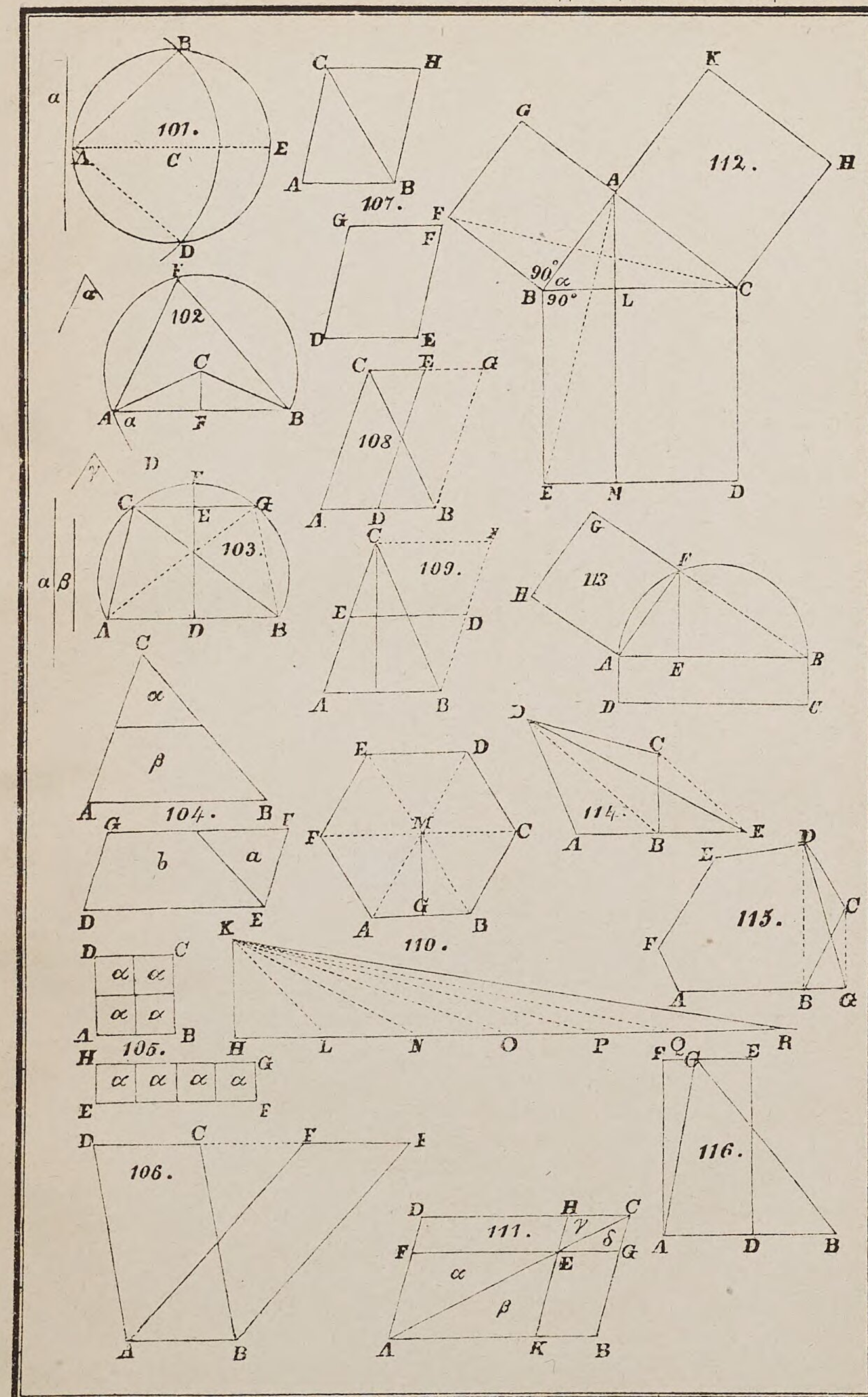

24.
25.
26
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.a
38.b
39.
40.a.
40 b.
40 c.
41.
42.
43.
44.
45.

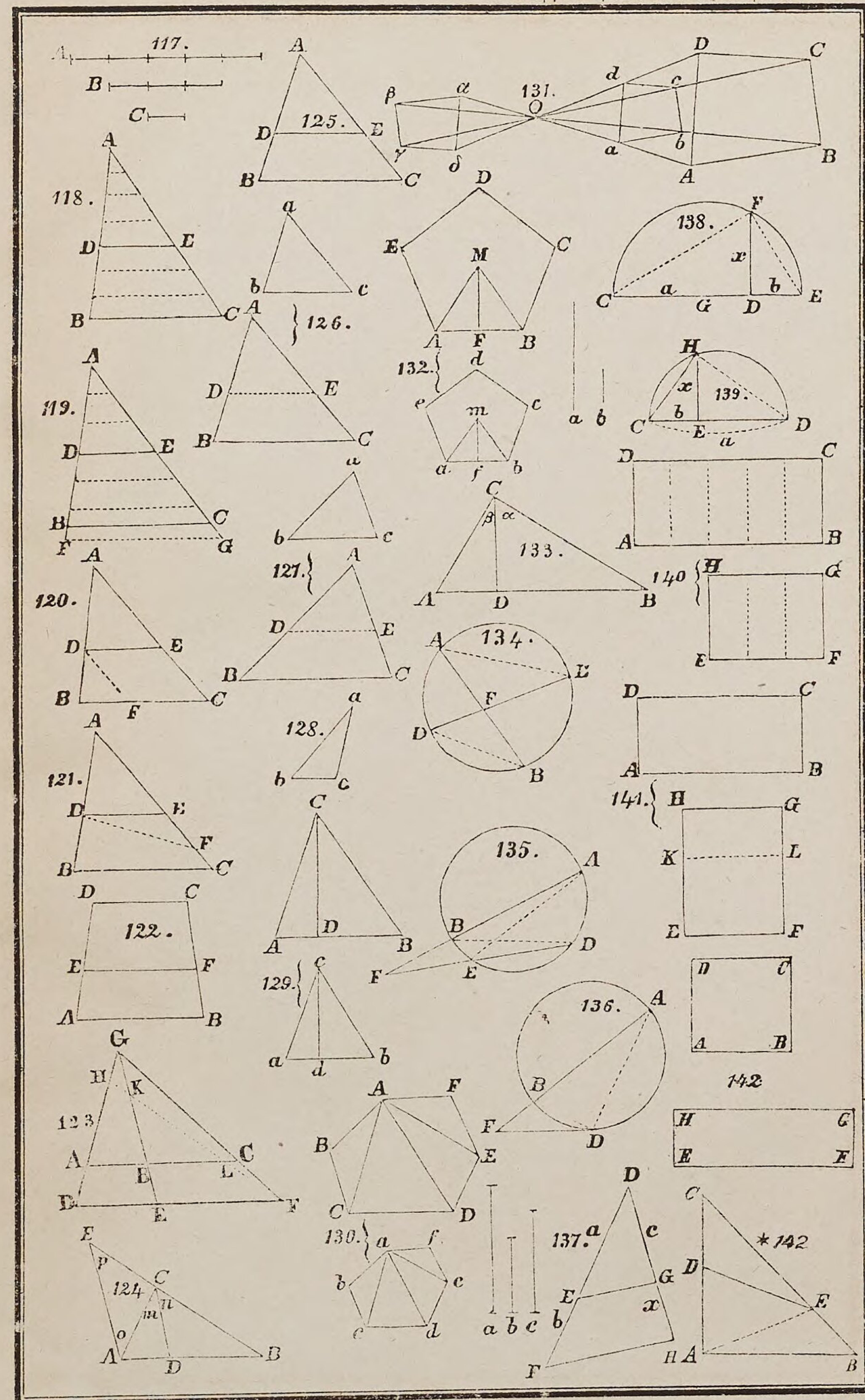

46
47
48.
49.
50
51.
52.
53.
54.
55
56.
57a
57b
58.
59.
60.
61.
62
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.

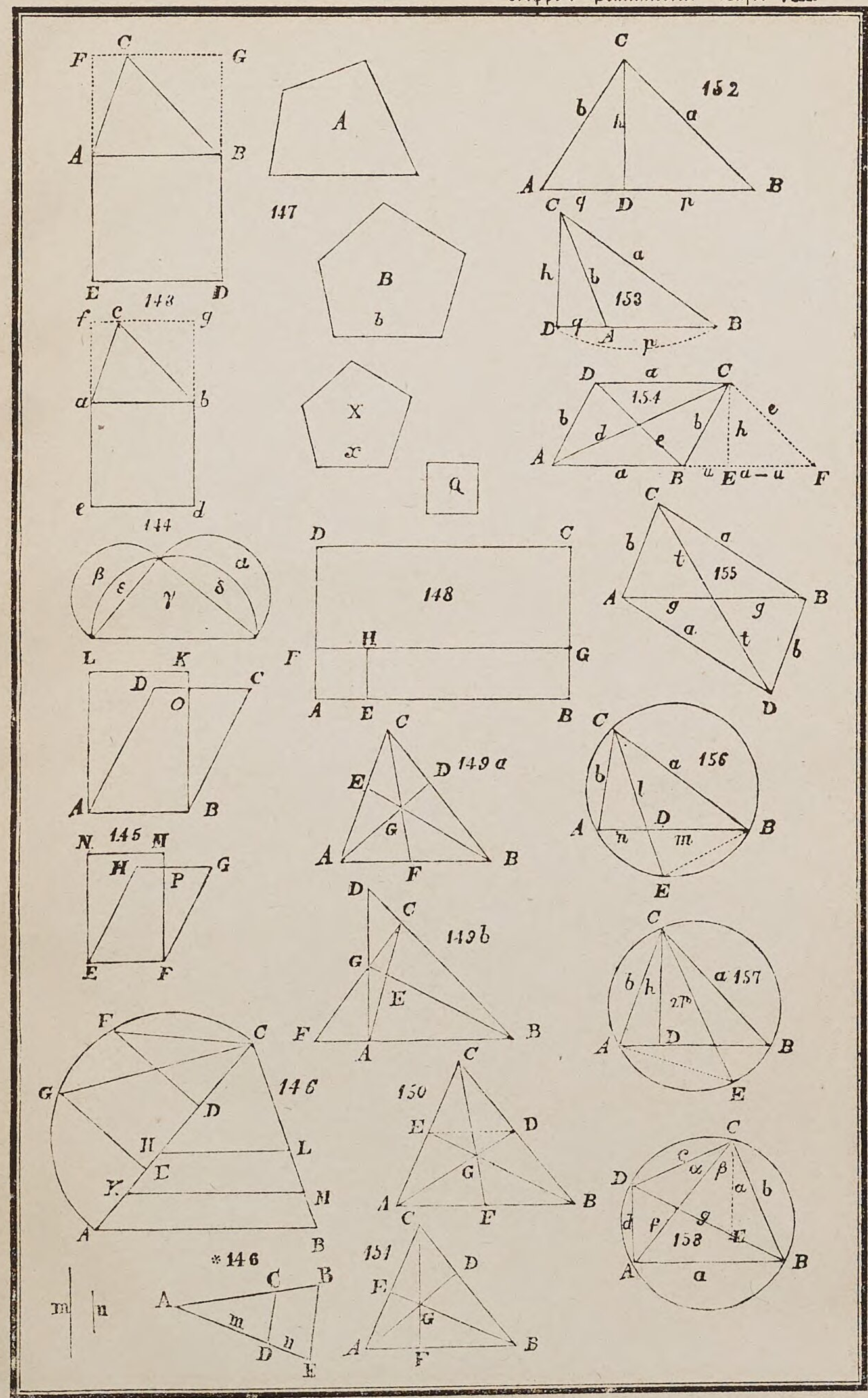

70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83
84.
85.
86,a.
86,b.
86,c.

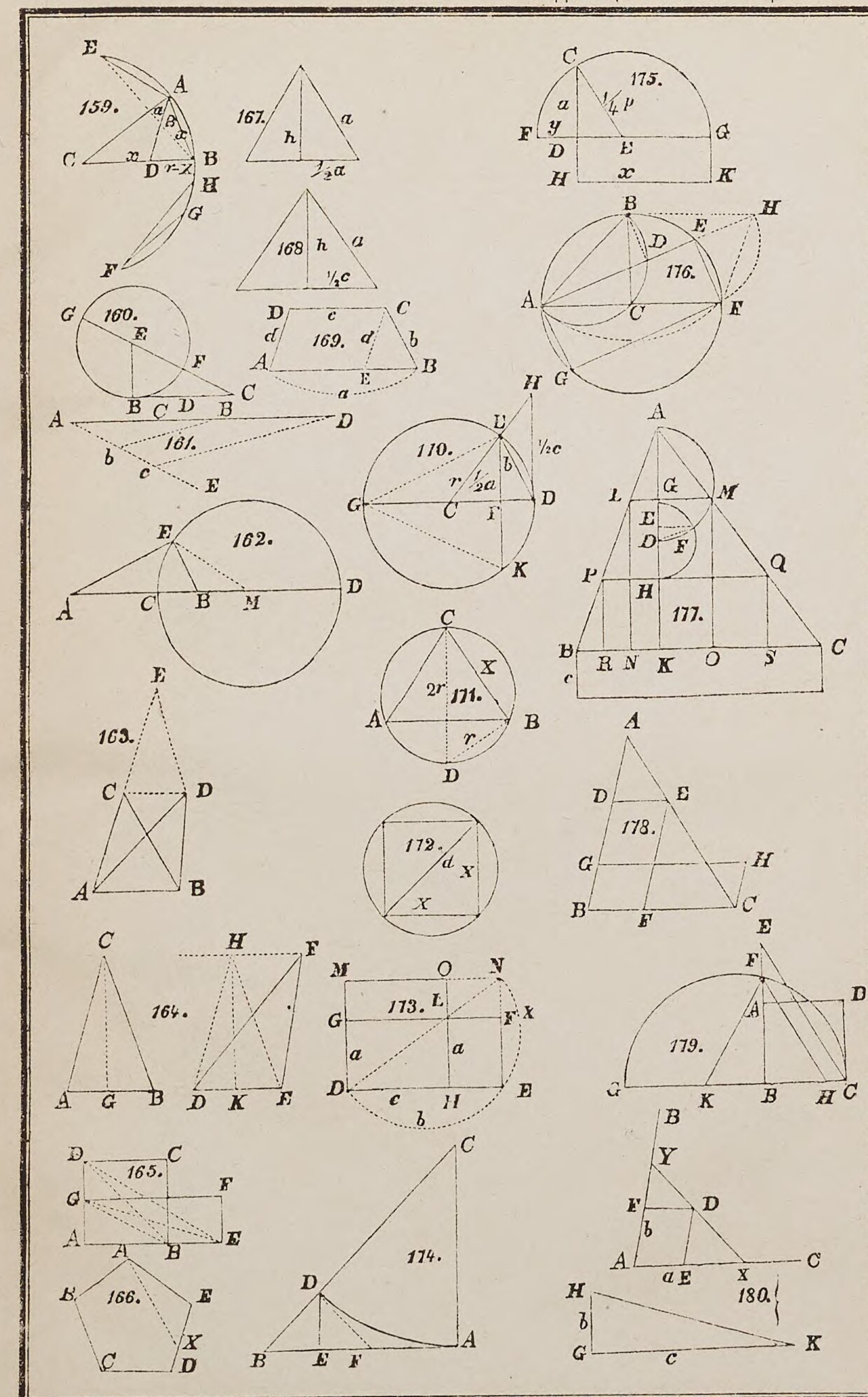



87.
92.
98, a.
88, a.
93.
98, b.
88, b.
94.
99.
89.
95.
100
90.
96.
91.
97.
97*


101.
102
103.
104.
105.
106.
107.
108
109.
110.
111.
112.
113
114.
115.
116.


117.
118.
119.
120.
121.
122.
123
124
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
138.
139.
140
141.
142
*142


143
144
145
146
*146
147
148
149 a
149 b
150
151
152
153
154
155
156
157
158


159.
160.
161.
162.
163.
164.
165.
166.
167.
168
169.
170.
171.
172.
173.
174.
175.
176.
177.
178.
179.
180.

8° Math

Hoppe